Matemática Discreta

Pablo Musumeci

2 de julio de 2012

Índice

1. Lógica Proposicional

Una proposición es un enunciado del lenguaje al que tiene sentido asignarle un valor de verdad o falsedad.

1.1. Conectores lógicos

1. **Negación**: Es un operador que se ejecuta, sobre un único valor de verdad, devolviendo el valor contradictorio de la proposición considerada.

p	**¬ p**
0	1
1	0

2. **Conjunción**: Es un operador que devuelve verdadero cuando ambas proposiciones son verdaderas, y falso en cualquier otro caso.

p	**q**	**p ∧ q**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. **Disyunción**: Es un operador que devuelve verdadero cuando una de las proposiciones es verdadera, o cuando ambas lo son, y falso cuando ambas son falsas.

p	**q**	**p ∨ q**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4. **Disyunción excluyente**: Es un operador que devuelve verdadero cuando una de las proposiciones es verdadera, y falso cuando ambas son verdaderas o falsas.

p	**q**	**p $\veebar$ q**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

5. **Implicación** [1]: Es un operador que devuelve falso sólo cuando la primera proposición es verdadera y la segunda falsa, y verdadero en cualquier otro caso.

[1] No cumple propiedad conmutativa $p \to q \neq q \to p$

p	**q**	**p → q**
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

6. Implicación contrarecíproca ≡ Implicación

p	**q**	**p ← q**
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

7. **Doble Implicación**: Es un operador que devuelve verdadero cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad, y falso cuando sus valores de verdad difieren.

p	**q**	**p ↔ q**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.2. Tipos de proposiciones

- *Tautología:* Esquema proposicional que toma un valor **verdadero**, independientemente de las proposiciones que la integran.
- *Contradicción:* Esquema proposicional que toma un valor **falso**, independientemente de las proposiciones que la integran.
- *Contingencia:* Esquema proposicional que puede resultar **verdadero o falso**.

1.3. Leyes de la lógica

1. Conmutatividad de $\wedge$ y $\vee$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \quad \text{y} \quad p \vee q \equiv q \vee p$$

2. Asociatividad de $\wedge$ y $\vee$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \quad \text{y} \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

3. Doble distributividad

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad \text{y} \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \vee r)$$

4. Identidad

$$\begin{aligned} p \vee 1 &\equiv 1 \\ p \vee 0 &\equiv p \\ p \wedge 1 &\equiv p \\ p \wedge 0 &\equiv 0 \end{aligned}$$

5. Idempotencia

$$(p \vee p) \equiv p \quad \text{y} \quad (p \wedge p) \equiv p$$

6. Doble negación

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

7. Absorción

$$(p \wedge q) \vee p \equiv p \quad \text{y} \quad (p \vee q) \wedge p \equiv p$$

8. Leyes de De Morgan

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \quad \text{y} \quad \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

1.4. Métodos para demostrar una implicación $p \to q$

1. Método Directo
   Suponer $v(p) = 1$ y llegar a que $v(q) = 1$.
2. Método inidirecto o del contrarecíproco
   Demostrar la verdad de la implicación *contrarecíproca* por método directo
   Suponer $v(\neg p) = 1$ y llegar a que $v(\neg q) = 1$.
   Ejemplo:
   Quiero demostrar $p \to q \equiv$ ab es par $\to$ (a es par $\vee$ b es par).
   Entonces, demuestro $v(q) = 0$, esto se logra demostrando los 3 casos donde $v(p) = 0$

$$v(q) = 0 \begin{cases} v(a) = 0 \wedge v(b) = 0 \\ v(a) = 1 \wedge v(b) = 0 \\ v(a) = 0 \wedge v(b) = 1 \end{cases}$$

3. Método del Absurdo o Contradicción
   Supongo $\begin{cases} v(p) = 1 \\ v(q) = 0 \end{cases}$ e intento llegar a un absurdo.

2. Lógica de Predicados

2.1. Función Proposional

No son proposiciones debido a que **no** se le puede asignar un valor de verdad, ya que depende de una variable.

Ej: $P(x) = x$ es inteligente.

Una vez especializada la variable, se transforma en una proposición.

2.2. Cuantificación de una variable

- Universal $\forall x \in D : P(x)$
  - *Verdadero*: Hay que mostrar que todos los elementos de D tienen la propiedad P.
  - *Falso*: Basta mostrar un elemento de D que **no** tenga la propiedad P.
- Existencial $\exists x \in D : P(x)$
  - *Verdadero*: Basta mostrar un elemento de D que tenga la propiedad P.
  - *Falso*: Hay que mostrar que todos los elementos de D **no** tienen la propiedad P.

2.2.1. Propiedades

- $\forall y : \exists x \neq \exists x : \forall y$
- $\forall x : \forall y \equiv \forall y : \forall x$
- $\exists x : \exists y \equiv \exists y : \exists x$
- $\neg \left[\forall x \in D : P(x)\right] \equiv \exists x \in D : \neg P(x)$
- $\neg \left[\exists x \in D : P(x)\right] \equiv \forall x \in D : \neg P(x)$

3. Conjuntos

3.1. Álgebra de conjuntos

- *Igualdad*: $A = B \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$
- *Inclusión*: $A \subseteq B \leftrightarrow (\forall x \in U) : (x \in A \rightarrow x \in B)$
- *Union*: La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cup B$ que contiene cada elemento que está por lo menos en uno de ellos.
- *Intersección*: La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cap B$ que contiene todos los elementos comunes de A y B.

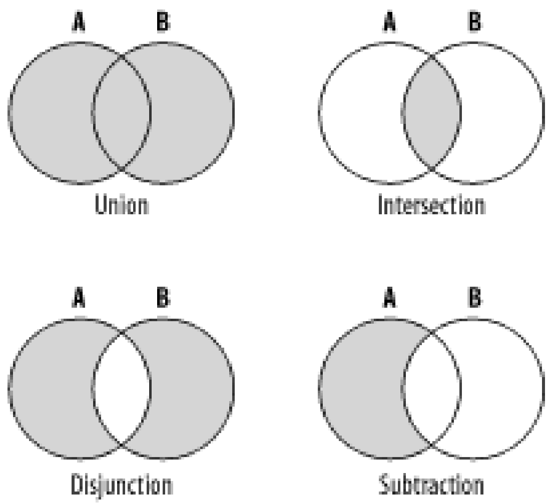

Figura 1: Diagramas de Venn

- *Diferencia*: La diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto $A \setminus B$ que contiene todos los elementos de A que no pertenecen a B.
- *Complemento*: El complemento de un conjunto A es el conjunto $A^{\complement}$ que contiene todos los elementos (respecto de algún conjunto referencial) que no pertenecen a A.
- *Diferencia simétrica*: La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \Delta B$ con todos los elementos que pertenecen, o bien a A, o bien a B, pero no a ambos a la vez.

3.2. Relaciones de conjuntos

Sea A un conjunto. Se llama *Relación en el conjunto* A a todo conjunto $R : R \subseteq A \times A$

Definiciones:

1. Producto cartesiano: $\times$
   $A \times B = \{(a, b) a \in A \wedge b \in B\}$
2. Cardinal de A: $|A| =$ Cantidad de elementos de A
3. Conjunto de partes : $P[A] = \{X : X \subseteq A\}$
   $P[\{1, 2, 3\}] = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
   $|A| = n \rightarrow |P[A]| = 2^n$
4. Compresión $\{\{x, y\} \in A \times A : x + y \leq \alpha\}$

Relaciones:

- Complementaria: $\overline{R} = \{\{(x, y)\} \in A \times A : (x, y) \notin R\}$

- Inversa: $R^{-1} = \{\{(x, y)\} \in A \times A : (y, x) \in R\}$
- Unión: $R \subseteq A \times A \wedge S \subseteq A \times A$

$$R \cup S = \{\{(x, y)\} \in A \times A : (x, y) \in R \vee (x, y) \in S\}$$

- Intersección: $R \subseteq A \times A \wedge S \subseteq A \times A$

$$R \cup S = \{\{(x, y)\} \in A \times A : (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S\}$$

- Reflexiva: $\forall x \in A : (x, x) \in R \; \forall x \in A : x\mathcal{R}x$
- Simétrica: $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$
- Antisimétrica: $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$
- Transitiva: $\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$
- Equivalencia: $\begin{cases} \text{Reflexiva} \\ \text{Transitiva} \\ \text{Simétrica} \end{cases}$
- Orden: $\begin{cases} \text{Reflexiva} \\ \text{Antisimétrica} \\ \text{Transitiva} \end{cases}$

Ejemplo:
$A = \{1, 2, 3\}$
$R_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 3\}, \{3, 1\}\}$

3.3. Representación matricial

Una relación tiene asociada una *matriz de relación* la cual contiene toda la informacion sobre la misma.
Ejemplo:
$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$R = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 1\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}, \{4, 1\}, \{4, 4\}\}$
M_R = Matriz de la relación R
$M_R \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
R_1 es simétrica, no reflexiva y no transitiva.
¿Cómo puedo obtener esta información observando la matriz?

- Reflexión $I \leq M_R$

- Simetría $M_R = {M_R}^T$
- Antisimetría $M_R \cap {M_R}^T \leq I$
- Transitividad ${M_R}^2 = M_R M_R \leq M_R$

Se considera que una matriz (de tamaño $m \times n$) es mayor o igual que otra (del mismo tamaño) si:

$$c_{i,j} \leq d_{i,j} \quad \forall i, j \text{ tal que } \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 1 \leq j \leq n$$

3.4. Clases de equivalencia

Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A , $\forall a \in A$ se define: $\overline{a} = [a] = cl(a) = \{x \in A : x\mathcal{R}a\}$

Teorema: Sea R una relación de equivalencia en A, se verifica:

1. $\forall a \in A : [a] \subseteq A$
2. $\forall a \in A : [a] \neq \varnothing$
3. $\forall a, b \in A : a\mathcal{R}b \leftrightarrow [a] = [b]$
4. $\forall a, b \in A : a\not\mathcal{R}b \leftrightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$

3.5. Partición

Una partición de un conjunto A es la familia de subconjuntos $\{A_i : 1 \leq i \leq n\}$ que cumple las siguientes condiciones:

1. $A_i \subseteq A \forall i : 1 \leq i \leq n$
2. $A_i \neq \varnothing \quad \forall i : 1 \leq i \leq n$
3. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$
4. $A_i \cap A_j \neq \emptyset \quad \forall i, j : 1 \leq i; \quad j \leq n \quad \wedge (i \neq j)$

El conjunto de las clases de equivalencia de A forma una partición de A

3.6. Relación de orden

Sea A un conjunto dado no vacío y $\mathcal{R}$ una relación binaria definida en A , entonces decimos que $\mathcal{R}$ es una relación de orden *parcial* si cumple las siguientes propiedades:

- Reflexiva
- Antisimétrica
- Transitiva

Si $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado, decimos que A es *totalmente ordenado* si $\forall x, y \in A$ ocurre que $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$. Si esto ocurre decimos que $\mathcal{R}$ es un *orden total*.

Elemento maximal Si A es un conjunto parcialmente ordenado, entonces un elemento $x \in A$ es un elemento *maximal* de A si para todo $a \in A, a \neq x \to x\not{\mathcal{R}}a$.

Elemento minimal Si A es un conjunto parcialmente ordenado, entonces un elemento $y \in A$ es un elemento *minimal* de A si para todo $b \in A, b \neq y \to b\not{\mathcal{R}}y$.

Maximo Si A es un conjunto parcialmente ordenado, entonces un elemento $x \in A$ es un elemento *máximo* de A si para todo $a \in A, a\mathcal{R}x$.

Mínimo Si A es un conjunto parcialmente ordenado, entonces un elemento $y \in A$ es un elemento *mínimo* de A si para todo $b \in A, y\mathcal{R}b$.

Sea $(A, \mathcal{R})$ un conjunto parcialmente ordenado con $B \subseteq A$.

Cota superior Un elemento $x \in A$ es una *cota superior* de B si para todo $b \in B, b\mathcal{R}x$.

Cota inferior Un elemento $y \in A$ es una *cota inferior* de B si para todo $b \in B, y\mathcal{R}b$.

Supremo Un elemento $x' \in A$ es *supremo* de B, si es una cota superior de B y $x'\mathcal{R}x''$ para todas las demás cotas superiores $x'' \in B$. **Menor de las cotas superiores**.

Infimo Un elemento $y' \in A$ es *infimo* de B, si es una cota inferior de B y $y''\mathcal{R}y'$ para todas las demás cotas inferiores $y'' \in B$. **Mayor de las cotas inferiores**.

3.6.1. Diagramas de Hasse

Un diagrama de Hasse es una representación gráfica simplificada de un conjunto parcialmente ordenado finito. Esto se consigue eliminando información redundante. Para ello se dibuja una arista ascendente entre dos elementos solo si uno sigue a otro sin haber otros elementos intermedios.

En un diagrama de Hasse se elimina la necesidad de representar:

- Ciclos de un elemento, puesto que se entiende que una relación de orden parcial es reflexiva.
- Aristas que se deducen de la transitividad de la relación.

4. Principio de inducción matemático

La inducción es un razonamiento que permite demostrar una infinidad de proposiciones, o una proposición que depende de un parámetro que toma una infinidad de valores enteros. La inducción matemática consiste en el siguiente razonamiento:

Sea $P(n)$ un enunciado abierto, con n $\in \mathbb{N}$.

Hipótesis:

1. $v[P(n_0)] = 1$

2. $\forall h \in \mathbb{N}, h \geqslant n_0, v[P(h) \to P(h+1)] = 1$

Entonces $v(\forall n \geqslant n_0 \in \mathbb{N} : P(n_0)) = 1$ enq ue bolich

Se necesita el cumplimiento de ambas hipótesis para demostrar la veracidad de la tésis. El cumplimiento de una sola condición no implica nada.

Ejemplo: $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)$ ¿Es un número par?

Proposición básica: ¿$P(1)$ es verdadera?

$1(1+1) = 2$ es par $\to$ Es Verdadera

Proposición inductiva: $\forall h \geq 1 \quad P(h) \to P(h+1)$

$\underbrace{h(h+1) \text{ es par}}_{\text{Hipótesis Inductiva}} \to \underbrace{(h+1)(h+1+1) \text{ ¿Es par?}}_{\text{Tesis inductiva}}$

$\exists k \in \mathbb{N} : h(h+1) = 2k \to \exists k_1 \in \mathbb{N} : (h+1)(h+1+1) = 2k_1$

$(h+1)(h+1+1) = (h+1)(h+2) = h(h+1)+2(h+1) = 2k+2(h+1) = 2\underbrace{(k+h+1)}_{k_1 \in \mathbb{N}}$

Ejemplo:

$n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Como $S(1)$ es verdadera, ya tenemos nuestra *base para la inducción.* Si suponemos que el resultado es cierto para $n = k$(para algun$k \in \mathbb{N}$) queremos establecer nuestro paso *inductivo* mostrando que la verdad de $S(k)$ obliga a aceptar la verdad de $S(k+1)$. Para establecer la verdad de $S(k+1)$ debemos demostrar que

$$\sum_{i=1}^{k} +1i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Demostración:

$$\sum_{i=1}^{k} +1i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Y debido a que suponemos la verdad de $S(k)$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

lo que establece el paso inductivo del teorema.
Ejemplo:

¿Es $10^{n+1} + 10^n + 1$ divisible por 3 $\forall n \in \mathbb{N}$?
Proposición básica: ¿$P(1)$ es verdadera?

$100 + 10 + 1 = 111 = 90 + 21$ es múltiplo de 3 $\to$ Es Verdadera

Debo demostrar que si $n = n + 1 \to 10^{n+2} + 10^{n+1} + 1$ es múltiplo de 3

Comienzo a operar con un miembro de la igualdad, e intento llegar al otro.

$10^{n+2} + 10^{n+1} + 1 = 10^n 10^2 + 10^n 10 + (10 - 9)$

$10(10^{n+1} + 10^n + 1) - 9$

La expresión $10^{n+1} + 10^n + 1$ es múltiplo de 3 porque esa es la hipótesis de donde partimos.
$\to 10(3k) - 9 = 3(10k - 3) = 3k_0$ con $k_0 \in \mathbb{N}$

5. Ecuación de recurrencia

Es una ecuación que define una secuencia recursiva; cada término de la secuencia es definido como una función de términos anteriores.
Un problema que pueda ser definido en función de su tamaño, sea este N, pueda ser dividido en instancias más pequeñas ($< N$) del mismo problema. Se debe conocer la solución explícita para las instancias más simples, lo que se conoce como casos base, puediendose aplicar inducción sobre las llamadas más pequeñas y suponer que estas quedan resueltas.

5.1. Fibonacci

Los números de Fibonacci $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$ quedan definidos por las ecuaciones:

$$\text{Sucesión de Fibonacci} = \begin{cases} f_0 = 1 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \end{cases}$$

5.2. Torres de Hanoi

En una de las varillas se apila un número indeterminado de discos que determinará la complejidad de la solución. Los discos se apilan sobre una varilla en tamaño decreciente. No hay dos discos iguales, y todos ellos están apilados de mayor a menor radio en una de las varillas, quedando las otras dos varillas vacantes. El juego consiste en pasar todos los discos de la varilla ocupada (es decir la que posee la torre) a una de las otras varillas vacantes.
Para realizar este objetivo, es necesario seguir tres simples reglas:

1. Sólo se puede mover un disco cada vez.

2. Un disco de mayor tamaño no puede descansar sobre uno más pequeño que él mismo.

3. Sólo puedes desplazar el disco que se encuentre arriba en cada varilla.

¿Cuantos movimientos necesitamos para pasar $n (n \in \mathbb{N})$ discos? Si nos detenemos a pensarlo un momento, podemos osbservar que mover n discos puede descomponerse como:

- Mover todos los discos excepto el mayor.
- Mover el mayor.
- Volver a mover todos los discos excepto el mayor.

$a_1 = 1 \quad ; \quad a_2 = 3 \quad ; \quad a_3 = 7 \quad ; \quad a_4 = 15$

$$\rightarrow a_n = 2a_{n-1} + 1$$

5.3. Orden de la recurrencia

$$\boxed{\text{Orden} = n_{\text{mayor}} - n_{\text{menor}}}$$

Ejemplo: $a_{n+2} = a_{n-1} + 2a_{n-3} - a_{n-4}$

$\rightarrow$ Orden $= (n+2) - (n-4) = 6$

5.4. Ecuaciónes de recurrencia lineales de orden k

Clasificación:

Según $f(n) = \begin{cases} \text{Homogéneas:} f(n) \equiv 0 \\ \text{No homogéneas:} f(n) \neq 0 \end{cases}$

Según sus coeficientes $= \begin{cases} \text{Coeficientes constantes:} \quad c_i(n) = \text{cte} \forall i : 1 \leq i \leq k \\ \text{Coeficientes variables:} \quad \exists j \quad 1 \leq j \leq k : c_j(n) \neq \text{cte} \end{cases}$

5.4.1. Ecuaciónes homogéneas a coeficientes constantes

Se llama ecuación de recurrencia lineal homogénea de grado k, con coeficientes constantes, a una expresión del tipo:

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0, c_i \in \mathbb{R}, c_k \neq 0$$

A cada ecuación de recurrencia le corresponde una *ecuación característica*

$$x^k + c_{n-1} x^{k-1} + \cdots + c_{n-k}$$

- Teorema 1: Si t_n y s_n son soluciones de una ecuación de recurrencia homogénea $\rightarrow R_n = At_n + Bs_n$ son soluciones de la ecuacion $\forall A, B \in \mathbb{R}$
  Si t_n es solución $\rightarrow t_n = c_1 t_{n-1} + c_2 t_{n-2} \rightarrow At_n = Ac_1 t_{n-1} + Ac_2 t_{n-2}$
  Si s_n es solución $\rightarrow s_n = c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} \rightarrow Bs_n = Bc_1 s_{n-1} + Bc_2 S_{n-2}$
  $\underbrace{At_n + Bs_n}_{R_0} = \underbrace{c_1(At_{n-1} + Bs_{n-1})}_{c_1 R_{n-1}} + \underbrace{c_2(At_{n-2} + Bs_{n-2})}_{c_2 R_{n-2}}$

- Teorema 2: Si r_0 es raíz de la ecuación característica $\to s_n = (r_0)^n$ es solución de la ecuación de recurrencia.

  $s_n = c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2}$

  $c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} = c_1 {x_0}^{n-1} + c_2 {x_0}^{n-2}$

  ${x_0}^{n-2} \underbrace{(c_1 x_0 + c_2)}_{{x_0}^2} = {x_0}^{n-2} {x_0}^2 = {x_0}^2$

- Teorema 3: Si r_1 y r_2 son 2 raíces $\neq$ de la ecuación característica $\to s_n = Ar_1^n + Br_2^n$ es solución de la ecuación de recurrencia y $\forall a_0, b_0 \in \mathbb{R} \exists A_0, B_0 \in \mathbb{R}$ si $s_n = A_0 r_1^n + B_0 r_2^n$

  $$\text{Se cumple} \begin{cases} s_0 = a_0 \\ s_1 = b_1 \end{cases}$$

  Si $r_1$es raíz de la ecuación característica $\overset{Teorema\,2}{\to}$ ${r_1}^n$ es solución de la ecuación de recurrencia

  Si $r_2$es raíz de la ecuación característica $\overset{Teorema\,2}{\to}$ ${r_2}^n$ es solución de la ecuación de recurrencia

  $\to$ por Teorema 1, $s_n = Ar_1^n + Br_2^n$ es solución de la ecuación de recurrencia

  Busco $A, B /$ $\begin{matrix} s_0 = a_0 \to A + B = a_0 \\ s_1 = b_1 \to Ar_1 + Br_2 = b_0 \end{matrix}$

  Tiene solución si $r_1 \neq r_2$ lo cual se cumple por hipótesis.

- Teorema 4: Si $r_0 \neq 0$ es raíz doble de la ecuación característica $\to s_n = n{r_0}^n$ es solución de la ecuación de recurrencia.

- Teorema 5: Si $r_0 \neq 0$ es raíz doble de la ecuación característica $\to s_n = Ar_1^n + Br_2^n$ es solución de la ecuación de recurrencia y $\forall a_0, b_0 \in \mathbb{R} \exists A_0, B_0 \in \mathbb{R}$ si $s_n = A_0 r_0^n + B_0 r_0^n$

  $$\text{Se cumple} \begin{cases} s_0 = a_0 \\ s_1 = b_0 \end{cases}$$

  r_0 raíz de la ecuación caract. $\overset{Teorema\,2}{\to}$ ${r_0}^n$ es solución de la ecuación de recurrencia

  r_0 raíz doble de la ecuación caract. $\overset{Teorema\,4}{\to}$ $n{r_0}^n$ es solución de la ecuación de recurrencia

  $\to$ por Teorema 1, $s_n = Ar_0^n + Bnr_0^n$ es solución de la ecuación de recurrencia

  Busco $A, B /$ $\begin{matrix} s_0 = a_0 \to A = a_0 \\ s_1 = b_0 \to Ar_0 + Br_0 = b_0 \end{matrix}$

  Tiene solución si $r_0 \neq 0$ lo cual se cumple por hipótesis.

Ejemplos:

- Raices reales y distintas

  $2a_n - 7a_{n-1} + 3a_{n-2} = 0 \quad \wedge \quad a_0 = a_1 = 1$

  Propongo como solución $a_n = C \times R^n$

  $CR^{n-2}\,(2R^2 - 7R + 3) = 0$

  Raices $\rightarrow R_1 = 3 \wedge R_2 = ({}^1/_2)$

  $a_n = C_1(3)^n + C_2({}^1/_2)^n$

  Uso las condiciones iniciales para despejar los valores de C_1 y C_2

  $n = 0 \rightarrow a_0 = C_1 + C_2 = 1$

  $n = 1 \rightarrow a_1 = C_1 3 + C_2({}^1/_2) = 1$

  $\rightarrow C_1 = ({}^1/_5) \wedge C_2 = ({}^4/_5)$

  Solución $a_n = ({}^1/_5)(3)^n + ({}^4/_5)({}^1/_2)^n \quad n \geq 0$

- Raices reales e iguales

  $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0 \quad \wedge \quad a_0 = 2 \wedge a_1 = 5$

  Propongo como solución $a_n = C \times R^n$

  $CR^{n-2}\,(R^2 - 6R + 9) = 0$

  $(R - 3) = 0 \rightarrow R_1 = R_2 = 3$

  $a_n = C_1(3)^n + C_2(3)^n \rightarrow$ No sirve porque es un conjunto *linealmente dependiente.*

  $a_n = C_1(3)^n + nC_2(3)^n$

  $n = 0 \rightarrow a_0 = C_1 = 2$

  $n = 1 \rightarrow a_1 = C_1 3 + C_2 3 = 5$

  $\rightarrow C_1 = 2 \wedge C_2 = -({}^1/_3)$

  Solución $a_n = 2(3)^n - ({}^1/_3)n(3)^n \quad n \geq 0$

- Raices complejas conjugadas

  $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0 \quad \wedge \quad a_0 = 0 \wedge a_1 = 1$

  Propongo como solución $a_n = C \times R^n$

  $CR^{n-2}\,(R^2 - 2R + 2) = 0$

  $(R - 3) = 0 \rightarrow R_1 = 1 - i \quad \wedge \quad R_2 = 1 + i$

  $a_n = C_1(1 - i)^n + C_2(1 + i)^n$

  Recordar *Teorema de DeMoivre* $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$

  $(1 + i) = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$

  $(1 + i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos(\frac{\pi n}{4}) + i\sin(\frac{\pi n}{4})\right)$

  $(1 - i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos(\frac{-\pi n}{4}) + i\sin(\frac{-\pi n}{4})\right)$

  $a_n = C_1\left[(\sqrt{2})^n\left(\cos(\frac{\pi n}{4}) + i\sin(\frac{\pi n}{4})\right)\right] + C_2\left[(\sqrt{2})^n\left(\cos(\frac{-\pi n}{4}) + i\sin(\frac{-\pi n}{4})\right)\right]$

$a_n = (\sqrt{2})^n \left[(C_1 + C_2)\cos(\frac{\pi n}{4}) + i(C_1 - C_2)\sin(\frac{\pi n}{4})\right]$

Realizo el siguiente cambio de variables:

$K_1 = C_1 + C_2$

$K_2 = i(C_1 - C_2)$

$n = 0 \to a_0 = K_1 = 0$

$n = 1 \to a_1 = \sqrt{2}\left[K_1\frac{\sqrt{2}}{2} + K_2\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 1$

$\to K_1 = 0 \quad \wedge \quad K_2 = 1$

Solución $a_n = (\sqrt{2})^n \sin(\frac{\pi n}{4})$

5.4.2. Ecuaciónes no homogéneas

Recibe el nombre de ecuación de recurrencia lineal no homogénea de grado k, con coeficientes constantes, una expresión del tipo:

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n), c_i \in R, c_k \neq 0$$

1. Resolver ecuación homogénea $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0$
2. Hallar todas las soluciones de la ecuación homogénea
$$\to {a_n}^h$$
3. Hallar una solución particular
$$\to {a_n}^p$$
4. Todas las soluciones se presentan de la forma $a_n = {a_n}^h + {a_n}^p$

Encontrando una solución particular

$f(n)$	${a_n}^p$	Comentario
K	K'	$K,\ K' \in \mathbb{R}$
$K\ a^n$	$K'\ a^n$	a **no** es solución de la ecuación característica
$K\ a^n$	$K'\ n^p\ a^n$	a **es** solución de la ecuación característica
Pol de grado k	Pol de grado k	a **no** es solución de la ecuación característica
Pol de grado k	Pol de grado $k+1$	a **es** solución de la ecuación característica
$K\ \cos(nA)$ $K\ \sin(nA)$	$C_1\cos(nA) + C_2\sin(nA)$	

6. Grafos

Grado de un vértice Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido entonces $\sum grado(v) = 2|E|$ con $v \in V$.

Grafo completo Es un grafo simple donde cada par de vértices está conectado por una arista. Un grafo completo de n vértices tiene $n(n-1)/2$ aristas.

La cantidad de vértices de grado impar de un grafo, es un número par.

El grado total de un vértice es: $gr(v) = gr^{+}(v) + gr^{-}(v)$, en donde $gr^{+}(v)$ es la cantidad de aristas que inciden positivamente en v ("flechas que llegan"), y $gr^{-}(v)$ es la cantidad de aristas que inciden negativamente en v ("flechas que salen").

Grafo Regular Sea G un grafo no dirigido. Se dice que G es regular si todos sus vértices tienen el mismo grado.

Grafo dirigido Sea V un conjunto finito no vacío, y sea $E \subseteq V \times V$. El par (V, E) es un grafo dirigido (sobre V), donde V es el conjunto de vértices, y E es su conjunto de aristas.

Grafo complemento Sea V un conjunto de n vértices. El grafo complemento sobre V es un grafo no dirigido sin lazos tal que para todos los $a, b \in V, a \neq b$, existe una arista a, b.

Grafo no dirigido conexo Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Se dice que G es *conexo* si existe un camino simple entre cualquiera dos vértices distintos de G.

Grafo dirigido conexo Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Se obtiene su grafo no dirigido asociado no teniendo en cuenta las direcciones de las aristas. Cuando este grafo no dirigido asociado es conexo, consideramos que G es conexo.

Grafo fuertemente conexo Un grafo dirigido es llamado fuertemente conexo si para cada $u, v \in V$ existe un camino de u hacia v y un camino de v hacia u.

Grafo bipartito Un grafo $G = (V, E)$ es *bipartito* si $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ y cada arista de G es de la forma $\{a, b\}$ con $a \in V_1$ y $b \in V_2$. Si cada vértice de V_1 esta unido con los vértices de V_2, se tiene un *grafo bipartito completo*. En este caso, si $|V_1| = m$ y $|V_2| = n$, el grafo se denota como $K_{m,n}$.

Isomorfimos de grafos Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos no dirigidos. Una función $f : V_1 \to V_2$ es un *isomorfimos de grafos* si f es inyectiva; y para todos $a, b \in V_1, a, b \in E_1$ y $f(a), f(b) \in E_2$.

Circuito de Euler Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido sin vértices aislados. G tiene un circuito de Euler si existe un circuito en G que recorre cada arista del grafo **exactamente una vez**.

G tiene un circuito de Euler si y sólo si G es conexo y todo vértice de G tiene grado par.

Grafo euleriano Un grafo que contiene un ciclo de Euler o un camino de Euler que posee a todas las aristas y vértices del grafo.

Circuito de Euler dirigido Sea G un grado dirigido sin vértices aislados. El grafo G tiene un circuito dirigido si y sólo si G es conexo y $ge(v) = gs(v)$ para todo $v \in V$ siendo $ge(v)$ el grado de entrada de v y gs el grado de salida.

Recorrido de Euler Si G es un grafo no dirigido sin vértices aislados. entonces podemos encontrar un recorrido de Euler en G si y sólo si G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Ciclo Hamiltoniano Sea G un grafo con $|V| \geq 3$, decimos que G tiene un ciclo hamiltoniano si existe un ciclo en G que contenga cada vértice de V. El ciclo hamiltoniano pasa por cada vértice **una sola vez**.

Camino Hamiltoniano Es un camino simple de G que contiene todos los vértices. Dado un ciclo hamiltoniano, la eliminación de cualquier arista en el ciclo produce un camino hamiltoniano.

Grafo de Hamilton Un grafo que contiene un ciclo hamiltoniano se conoce como grafo hamiltoniano.

7. Árboles

Árbol Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido sin lazos. El grafo G es un árbol si G es conexo y no contiene ciclos.

Bosque Se denomina *bosque* a un grafo sin ciclos.

Árbol m-ario Sea $T = (V, E)$ un árbol con raíz y sea m un entero no negativo. T es un árbol m-ario si $gs(v) \leq m$ para todo $v \in V$.

7.1. Propiedades

- En cualquier árbol $T = (V, E), |V| = |E| + 1$
- Sea T un árbol m-ario completo, con $|V| = n$. Si T tiene h hojas e i vértices internos, entonces:
  - $n = mi + 1$
  - $h = (m - 1)i + 1$
  - $i = (h - 1)/(m - 1) = (n - 1)/m$
- Sea T un árbol m-ario completo equilibrado con h hojas. Entonces su altura es $\log_m(h)$
- Para cualquier árbol, si $|V| \geq 2$, entonces el árbol tiene al menos 2 vértices colgantes (vértices de grado 1).

- textbfDemostración Sea $|V| \geq 2$, sabemos que $E = V - 1$, así como también $2|E| = \sum gr(v) \forall v \in V$. Como el grafo es conexo, $gr(v) \geq 1 \forall v \in V$.

  Continuemos demostrando que las alternativas opuestas (que el árbol tenga uno o ningún vértice colgante) son absurdas.

  Si el árbol no posee ningún vértice colgante, entonces:

  $2(|V| - 1) = 2|E| = \sum gr(v) \geq 2|V| \rightarrow 2|V| - 2 \geq 2|V|$ abs!.

  Si el árbol tiene un solo vértice colgante:

  $2(|V| - 1) = 2|E| = \sum gr(v) \geq 2|V - 1| + 1 \rightarrow 2|V| - 2 \geq 2|V - 1| + 1$ abs!.

7.2. Demostraciones

- Si $G = (A, V)$ es un bosque, $|A_G| = |V_G| - k$ siendo k la cantidad de árboles de G.
- En todo árbol existen al menos 2 vértices de grado 1.

8. Redes de transporte

Red de transporte Sea $N = (V, E)$ un grafo dirigido conexo sin lazos. Entonces N es una red de transporte si se cumplen las condiciones:

- Existe un único vértice $a \in V$ tal que el grado de entrada de a es igual a 0. Dicho vértice es la *fuente*.
- Existe un único vértice $z \in V$ tal que el grado de salida de z es igual a 0. Dicho vértice se denomina *sumidero*.
- El grafo N es ponderado, por lo que existe una función E en el conjunto de los enteros no negativos que asigna a cada arista $e = (v, w) \in E$ una *capacidad*, que se denota como $c(e) = c(v, w)$.

Flujo Si $N = (V, E)$ es una red de transporte, una función f de E a los enteros no negativos es un flujo de N si

- $f(e) \leq c(e)$ para toda arista $e \in E$.
- Para cualquier $v, w \in V$ distinto de la fuente o del sumidero, $\sum f(w, v) = \sum f(v, w)$.

La primer condición especifica que la cantidad de material transportado a lo largo de una arista no puede exceder su capacidad. La segunda condición pide que la cantidad de material que fluye hacia un vértice v debe ser igual a la cantidad que fluye desde ese vértice. Esto vale para todos los vértices exceptuando a la fuente y al sumidero.

El valor de un flujo esta dado por:

$val(f) = \sum f(x, v) - \sum f(w, x)$ con $x \in P$ y $w, v \in \overline{P}$

Saturación Una arista esta saturada si $f(e) = c(e)$. Es decir, transporta material al límite máximo posible de su capacidad.

Conservación del flujo El flujo total que sale de la fuente a es igual al flujo total que llega al sumidero z.

Demostración Considerando a $P = \{a\}$ y $\overline{P} = V - P$ sabemos que $val(f) = \sum f(x, v) - \sum f(w, x)$ con $x \in P$ y $v, x \in \overline{P}$.

$\sum f(w, x) = 0 = \sum f(w, a)$ ya que el grado de entrada de a es 0.

Analogamente $\sum f(z, w) = 0$ ya que el grado de salida de z es 0.

Por lo tanto $val(f) = \sum f(a, v) = \sum f(y, z)$ con $y \in V - \{z\}$ y $v \in V - \{a\}$.

Corte Si $N = (V, E)$ es una red de transporte, y C es un conjunto de corte para el grafo no dirigido asociado a N si la eliminación de las aristas de C de la red, produce la separación de la fuente con el sumidero.

La capacidad de un corte se define como $\sum c(v, w)$ con $v \in P$ y $w \in \overline{P}$. Siendo P y $\overline{P}$ los 2 conjuntos separados por el corte.

Teorema del flujo máximo y el corte mínimo Para una red de transporte $N = (V, E)$ el flujo máximo que se puede obtener en N es igual a la capacidad mínima sobre todos los cortes de la red.