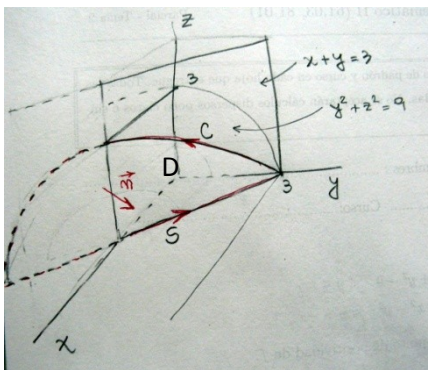


Coloquio 14-02-14:

1.- Sean $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 9; x + y = 3; z \geq 0\}$ y $\vec{F}(x, y, z) = (y + e^{x+y}, x + e^{x+y}f(z)), f \in C^1(\mathbb{R})$
Calcular la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de C indicando en un gráfico la orientación elegido.

La intersección entre el cilindro de eje x y el plano vertical $x + y = 3$ determina una elipse, pero como debe ser $z \geq 0$, se trata sólo del arco superior de la elipse y por lo tanto no es una curva cerrada.



Si la cerramos con un segmento de recta S sobre el plano $z = 0$ estaremos en condiciones de aplicar el Teorema de Stokes para calcular la circulación, ya que el campo $\vec{F}(x, y, z) = (y + e^{x+y}, x + e^{x+y}f(z))$ es $C^1(\mathbb{R}^3)$, pero deberemos luego descontar la circulación sobre el segmento agregado.

Es $\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + e^{x+y} & x + e^{x+y}f(z) & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$ por lo que el flujo a través del trozo D de plano $x + y = 3$ encerrado por la curva es nulo.

Como por el Teorema es $\iint_D \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{s} = \oint_{C \cup S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{l}$ resulta $0 = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{l}$ y entonces $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{l}$

El segmento S es la porción de recta $\begin{cases} x + y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$ que va desde el punto $(6, -3, 0)$ hasta el punto $(0, 3, 0)$ pues esos son los dos puntos de intersección del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ con $z = 0$ y $x + y = 3$

Entonces es $S : (x, y, z) = (6, -3, 0) + t[(0, 3, 0) - (6, -3, 0)]$ con $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} &= -\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int_0^1 \vec{F} \cdot \left. \frac{d\vec{l}}{dt} \right|_S (-6, 6, 0) dt = \\ &= -\int_0^1 [-6(-3 + 6t + e^{6-6t-3+6t}) + 6(6 - 6t + e^{6-6t-3+6t})] dt = \int_0^1 (-54 + 72t) dt = -18 \end{aligned}$$

y ése es el valor de la circulación pedida, con la curva C orientada como se muestra en el gráfico.

2.- Sea Σ el trozo de cono de ecuación $z^2 = 4(x^2 + y^2)$, con $2 \leq z \leq a$. Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ de manera tal que el área de Σ sea $3\sqrt{5}\pi$.

(La superficie es “una pantalla de velador” puesta hacia arriba... ☺)

Como la ecuación de la superficie se puede escribir $\left(\frac{z}{2}\right)^2 = x^2 + y^2$, se la puede parametrizar del siguiente modo:

$$\vec{X}(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), 2v) \text{ para } u \in [0, 2\pi], v \in \left[1, \frac{a}{2}\right]$$

La normal a superficie es, entonces,

$$\vec{X}'_u \times \vec{X}'_v = (-v \sin(u), v \cos(u), 0) \times (\cos(u), \sin(u), 2) = (2v \cos(u), 2v \sin(u), -v)$$

cuya norma es $\|\vec{X}'_u \times \vec{X}'_v\| = \|(2v \cos(u), 2v \sin(u), -v)\| = \sqrt{5}v$

El área es, entonces, $\iint_S ds = \int_0^{2\pi} \int_1^{a/2} \sqrt{5}v \, du \, dv = 2\sqrt{5}\pi \left(\frac{a^2}{8} - \frac{1}{2}\right)$ por lo que $a^2 = 16$.

Como debe ser $a > 2$, pues es $2 \leq z \leq a$, es $a = 4$.

3.- Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + \cos(z), e^z - 2xy, y + 3z)$ a través de la superficie frontera del cuerpo $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 4; z \geq 0\}$ considerando la normal saliente.

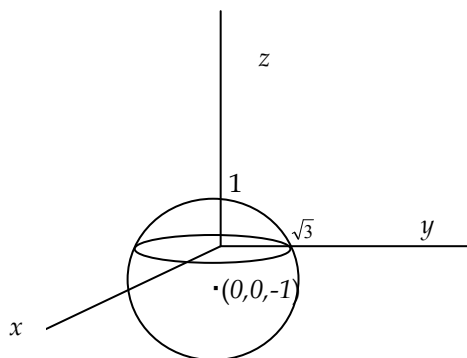
Como se trata de la *frontera* de un cuerpo, el flujo que se pide es a través de una superficie cerrada.

Como se pide considerar la normal saliente y el campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + \cos(z), e^z - 2xy, y + 3z)$ es $C^1(\mathbb{R}^3)$, podemos emplear el Teorema de la Divergencia.

$$\oiint_{\partial Q} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_Q \operatorname{div}(\vec{F}) \, dx \, dy \, dz$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 2x - 2x + 3 = 3 \text{ por lo que } \oiint_{\partial Q} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_Q 3 \, dx \, dy \, dz = 3 \operatorname{Vol}(Q)$$

El volumen es una porción de esfera de radio 2, centrada en $(0, 0, -1)$:



$$\begin{aligned}
 Vol(Q) &= \iint_{P_{xy}} dx dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}-1} dz = \iint_{P_{xy}} (\sqrt{4-x^2-y^2}-1) dx dy \stackrel{\text{coordenadas polares}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho(\sqrt{4-\rho^2}-1) d\rho \\
 &= 2\pi \left[-\frac{1}{2} \frac{(4-\rho^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{5}{3}\pi
 \end{aligned}$$

El flujo pedido vale, entonces, 5π .

4.- Sea el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (2x + 1, 2y - 1)$.

a) Demostrar que $\vec{F}$ es un campo de gradientes y hallar la función potencial Φ que satisface $\Phi(0,1) = 0$.

b) Para la Φ hallada en el ítem a), encontrar los extremos absolutos de Φ sobre la curva $x^2 + y^2 = 9$ y los puntos en los que los alcanza.

a) Para demostrar que es campo de gradientes basta con hallar el potencial ($\vec{F}$ es campo de gradientes si y sólo si $\exists \Phi / \vec{F} = \nabla \Phi$)

$$\vec{F}(x, y) = (2x + 1, 2y - 1) = \nabla \Phi \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = \Phi'_x \rightarrow x^2 + x + g(y) = \Phi \rightarrow g'(y) = \Phi'_y \\ 2y - 1 = \Phi'_y \end{cases}$$

$$\Phi'_y = 2y - 1 \rightarrow g(y) = y^2 - y + C \rightarrow \Phi(x, y) = x^2 + x + y^2 - y + C$$

Si $\Phi(0,1) = 0$, debe ser $C=0$.

b) Para buscar los extremos de $\Phi(x,y) = x^2 + x + y^2 - y$ sobre $x^2 + y^2 = 9$, parametrizamos la curva:
 $\vec{X}(t) = (3\cos(t), 3\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.

$$\Phi(\vec{X}(t)) = 9 + 3\cos(t) - 3\sin(t) = f(t)$$

Buscamos los extremos de $f(t)$ para $t \in [0, 2\pi]$:

$$f'(t) = -3\sin(t) - 3\cos(t) = 0 \Rightarrow \tan(t) = -1 \Rightarrow t = \frac{3}{4}\pi \text{ ó } t = \frac{7}{4}\pi$$

$$f''(t) = -3\cos(t) + 3\sin(t); f''(\frac{3}{4}\pi) = 6 > 0; f''(\frac{7}{4}\pi) = -6 < 0$$

Entonces existe:

- un máximo relativo en $\vec{X}(\frac{7}{4}\pi) = (3\cos(\frac{7}{4}\pi), 3\sin(\frac{7}{4}\pi)) = (3\frac{\sqrt{2}}{2}, -3\frac{\sqrt{2}}{2})$, donde la función vale
 $\Phi((3\frac{\sqrt{2}}{2}, -3\frac{\sqrt{2}}{2})) = \frac{9}{2} + 3\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{2} + 3\frac{\sqrt{2}}{2} = 9 + 3\sqrt{2}$ y
- un mínimo relativo en $\vec{X}(\frac{3}{4}\pi) = (3\cos(\frac{3}{4}\pi), 3\sin(\frac{3}{4}\pi)) = (-3\frac{\sqrt{2}}{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2})$, donde la función vale
 $\Phi(-3\frac{\sqrt{2}}{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{9}{2} - 3\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{2} - 3\frac{\sqrt{2}}{2} = 9 - 3\sqrt{2}$

Como $\Phi(\vec{X}(0)) = \Phi(\vec{X}(2\pi)) = 12 < 9 + 3\sqrt{2}$ y $12 > 9 - 3\sqrt{2}$, los extremos antes mencionados son absolutos.

5.- a) Sea la familia de curvas de ecuaciones $(x+3)^2 + 2(y-1)^2 = k$. Hallar la curva C perteneciente a la familia ortogonal a la familia dada, que pasa por el punto $(-2, 0)$.

b) Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (\sqrt{2+x^4} - y, 2x + \sqrt{2+y^4})$ a lo largo del perímetro de la región plana delimitada por la curva C del ítem a) y el eje de las abscisas. Indicar en un gráfico el sentido elegido para calcular la circulación.

a) Para $(x+3)^2 + 2(y-1)^2 = k$ la ecuación diferencial correspondiente es $2(x+3) + 4(y-1)y' = 0$

Reemplazando y' por $-\frac{1}{y'}$ se obtiene la ecuación de la familia ortogonal: $2(x+3) - 4(y-1)\frac{1}{y'} = 0$ o bien

$$\underbrace{4(y-1)dx}_P - \underbrace{2(x+3)dy}_Q = 0.$$

Como $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ pero $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{6}{-2(x+3)}$ sólo depende de x , se trata de una ecuación que, mediante un factor integrante dependiente de x se transforma en diferencial exacto:

$$\underbrace{4(y-1)\mu(x)dx}_{\tilde{P}} - \underbrace{2(x+3)\mu(x)dy}_{\tilde{Q}} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = 4\mu(x) \stackrel{\text{debe ser}}{=} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = -2\mu(x) - 2(x+3)\mu'(x)$$

$$-3\mu(x) = (x+3)\mu'(x) \Rightarrow \frac{-3}{x+3} = \frac{\mu'}{\mu} \Rightarrow -3\ln|x+3| + C = \ln|\mu|$$

Elegimos $\mu(x) = (x+3)^{-3}$:

$$\frac{4(y-1)}{(x+3)^3} dx - \frac{2}{(x+3)^3} dy = 0 \rightarrow \begin{cases} \tilde{P} = \frac{4(y-1)}{(x+3)^3} = \Phi'_x \\ \tilde{Q} = \frac{-2}{(x+3)^3} = \Phi'_y \end{cases} \rightarrow \frac{-2(y-1)}{(x+3)^2} + f(y) = \Phi \rightarrow \frac{-2}{(x+3)^2} + f'(y) = \Phi'_y$$

$$\text{Entonces } f'(y) = 0 \text{ y } \Phi = \frac{-2(y-1)}{(x+3)^2} + C$$

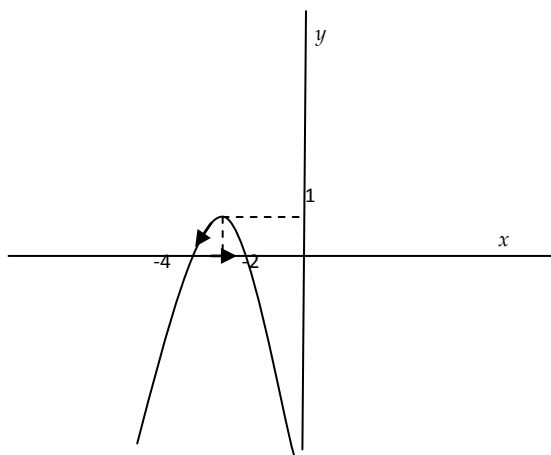
La solución de la ecuación diferencial es, entonces, $\frac{-2(y-1)}{(x+3)^2} = K$.

Como se busca la que pasa por $(-2,0)$ debe ser $\frac{-2(0-1)}{(-2+3)^2} = 2 = K$

Entonces la curva buscada es $\frac{-2(y-1)}{(x+3)^2} = 2$ o bien $y = 1 - (x+3)^2$.

b) Como se trata de la circulación a lo largo de un *perímetro*, la curva es cerrada, y como $\vec{F}(x,y) = (\underbrace{\sqrt{2+x^4} - y}_P, \underbrace{2x + \sqrt{2+y^4}}_Q)$ es $C^1(\mathbb{R}^2)$, se puede recurrir al Teorema de Green.

Llamando D a la región encerrada entre la curva $y = 1 - (x+3)^2$ y el eje de las abscisas y C a su perímetro, se tiene:



$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy = \iint_D (2 - (-1)) dx dy = 3 \iint_D dx dy = 3 \int_{-4}^{-2} dx \int_0^{1-(x+3)^2} dy = 3 \int_{-4}^{-2} [1 - (x+3)^2] dx = 4$$