

1-8-13

① Dada la seg. integral en coord. polares

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{2}{\cos(\theta)}} r^2 \sin(\theta) dr d\theta,$$

expresarla en coord. cartesianas y calcúlala

- coord. polares

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

 } en este caso $0 \leq \theta \leq \pi/4$ (límites de $d\theta$)

$$0 \leq r \leq \frac{2}{\cos(\theta)} \quad (\text{límites de } dr)$$

 Análisis uno de los límites de r :

$$r = \frac{2}{\cos(\theta)} \rightarrow (r \cdot \cos(\theta)) = 2 \rightarrow \boxed{x=2}$$

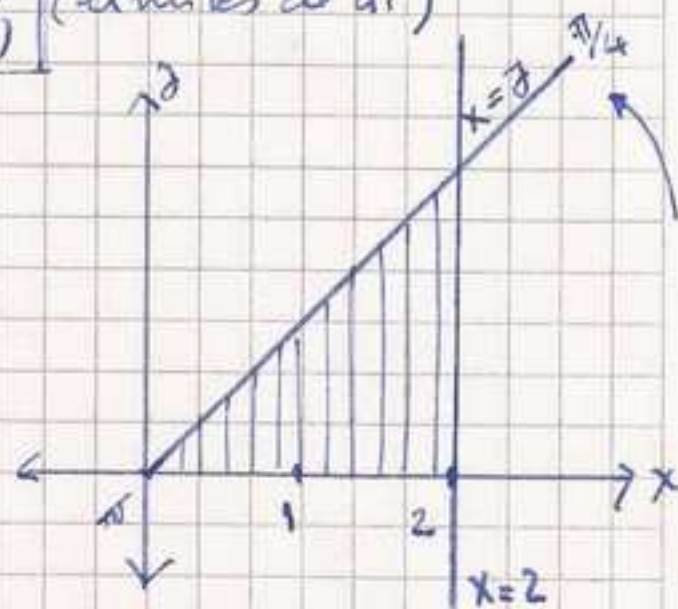
Para hacer el cambio de variables calculo el

$$\text{Jacobiano. Como } \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r \rightarrow \frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{r}$$

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{2}{\cos(\theta)}} r \cdot r \sin(\theta) dr d\theta = \int_0^2 \int_0^x y \cdot \frac{1}{x} dy dx =$$

$$= \int_0^2 \int_0^x y dy dx = \int_0^2 \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\int_0^2 \int_0^x y dy dx = \frac{4}{3}}$$

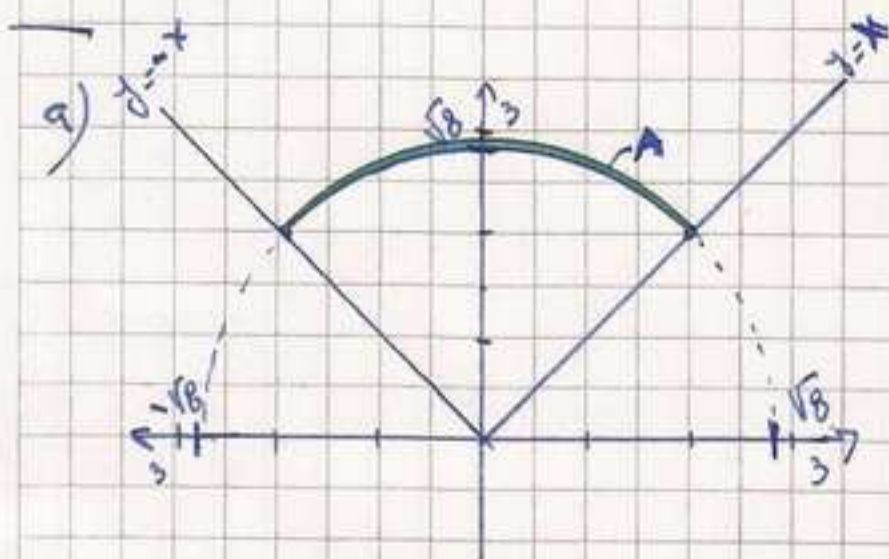


1-8-13

② Sean $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 8, |x| \leq y\}$ y $f(x, y) = -\frac{x^2}{2} + 2y$ un campo escalar definido sobre $\mathbb{R}^2$.

a) Graficar el conjunto A

b) Hallar los extremos absolutos de f sobre A



Este conj. lo puedo parametrizar como:

$$A: \vec{r}(t) = (\sqrt{8} \cos(t), \sqrt{8} \sin(t)) \quad t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \rightarrow r = \sqrt{8} \\ y = x \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$y = -x \rightarrow t = \frac{3\pi}{4}$$

b) A es un conj. compacto (cerrado y acotado), por el teorema de Weierstrass puedo asegurar que f alcanza por lo menos un máx. y un mín. abs.

Para calcular los máximos y mínimos, creo una función $h(t) = f(\vec{r}(t))$

$$\text{Sea } h(t) = f(\vec{r}(t)) = -\frac{8 \cos^2(t)}{2} + 2\sqrt{8} \sin(t) \rightarrow h(t) = -4 \cos^2(t) + 2\sqrt{8} \sin(t)$$

Busco los puntos críticos:

$$1) \text{ Extremos de la curva } \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{4} \quad t_2 = \frac{3\pi}{4} \rightarrow \begin{cases} PC_1 = \vec{r}(\frac{\pi}{4}) = (2, 2) \\ PC_2 = \vec{r}(\frac{3\pi}{4}) = (-2, 2) \end{cases}$$

2) Busco los valores de t / $h'(t) = 0$

$$h'(t) = +8 \cos(t) \sin(t) + 2\sqrt{8} \cos(t) = 2 \cos(t) (4 \sin(t) + \sqrt{8}) = 0$$

$$\rightarrow \cos(t) = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \rightarrow PC_3 = \vec{r}(\frac{\pi}{2}) = (0, 2\sqrt{2})$$

$$\cos(t) \neq 0 \rightarrow 4 \sin(t) + \sqrt{8} = 0 \rightarrow \sin(t) = -\frac{\sqrt{8}}{4} \rightarrow t = \frac{3\pi}{4} \rightarrow \text{ya está considerado } PC_2$$

Entonces, evalúo f en cada PC:

$$f(PC_1) = f(2, 2) = 2$$

$$f(PC_2) = f(-2, 2) = 2$$

$$f(PC_3) = f(0, 2\sqrt{2}) = 4$$

f alcanza máx. absoluto en $(0, \sqrt{8})$
 f alcanza mín. absoluto en $(2, 2)$ y $(-2, 2)$

③ Hallar el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (3x + e^z \sin z) + 2xz, x \cos z, -z^2)$ a través de la frontera del sólido:

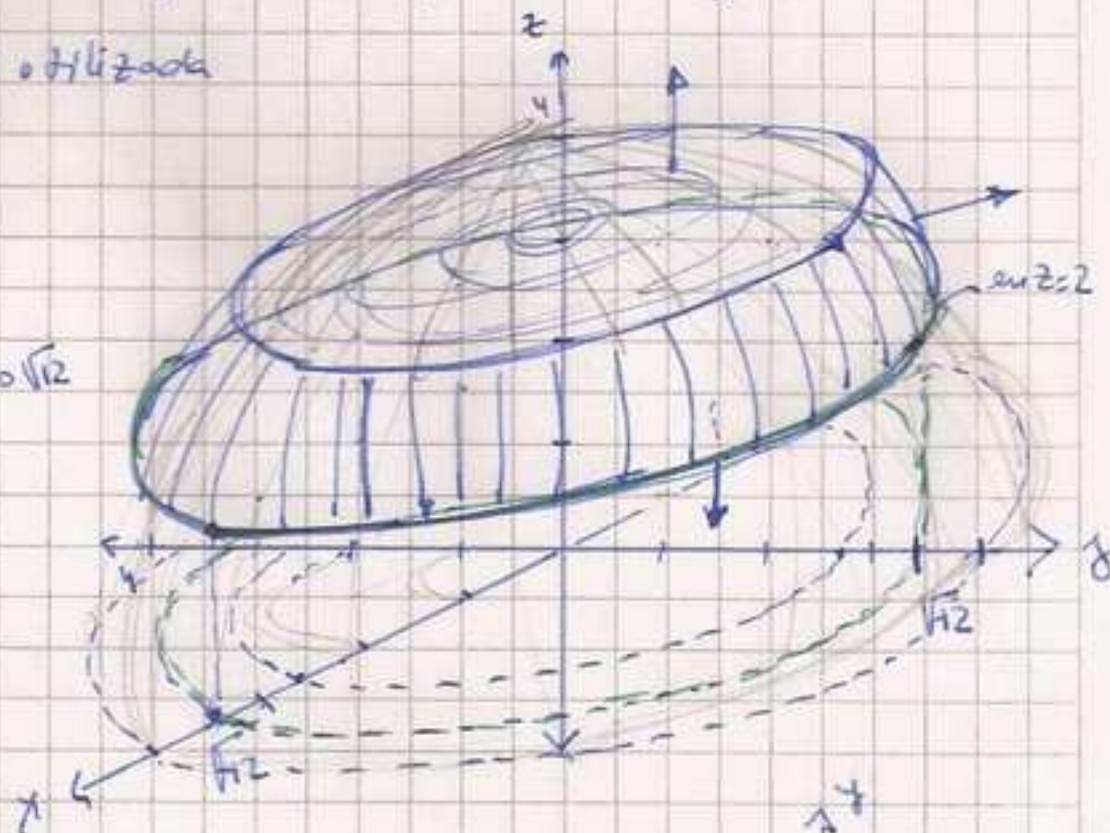
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, 2 \leq z \leq 3\}$$

Indicar en un gráfico la normal utilizada

Para analizar el gráfico, busco:

$$\begin{aligned} z=2 \\ x^2 + y^2 + 2^2 = 16 \rightarrow x^2 + y^2 = 12 \\ \text{circ. centro } (0,0,2) \text{ radio } \sqrt{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z=3 \\ x^2 + y^2 + 3^2 = 16 \rightarrow x^2 + y^2 = 7 \\ \text{circ. centro } (0,0,3) \text{ radio } \sqrt{7} \end{aligned}$$

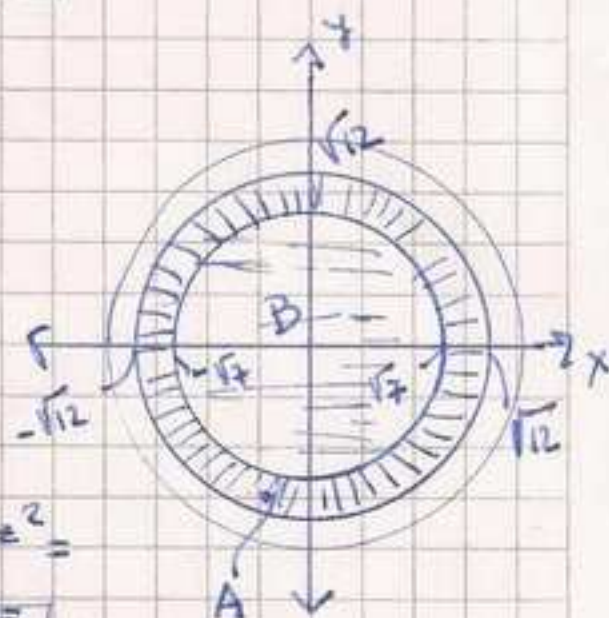


Como M es una región de $\mathbb{R}^3$

cuya frontera es una superficie S ($S = \partial M$) orientada

hacia el exterior, y $\vec{F} \in C^1$ en W entonces

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_M \text{div} \cdot \vec{F} \, d\text{vol}}$$



$$\begin{aligned} \text{Ahora calculo } \text{div} \cdot \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x + e^z \sin z) + \frac{\partial}{\partial y}(2xz) + \frac{\partial}{\partial z}(x \cos z - z^2) \\ &= 3 + 2/z + 0 - 2z = 3 - 2z = \text{div} \cdot \vec{F} \end{aligned}$$

Para integrar el volumen me conviene cambiar de variables. La más conveniente me parece que es a coord. cilíndricas:

$$\vec{r}(t,z) = (r \cos(t), r \sin(t), z) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Según el r que elija, z va a variar de 2 formas:

$$0 \leq r \leq \sqrt{7} \rightarrow z \text{ varía entre el plano } z=3 \text{ y } z=2$$

$$\text{y } \sqrt{7} \leq r \leq \sqrt{12} \rightarrow z \text{ varía entre el plano } z=2 \text{ y la sup. de la esfera}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \rightarrow |z| = \sqrt{16 - (x^2 + y^2)} \xrightarrow{z \geq 2} z = \sqrt{16 - r^2}$$

$$\text{Jacobiano} = r \quad \text{límites: } \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{7} \\ 2 \leq z \leq 3 \end{cases}$$

$$M = M_1 \cup M_2$$

$$\cup \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ \sqrt{7} \leq r \leq \sqrt{12} \\ 2 \leq z \leq \sqrt{16 - r^2} \end{cases}$$

1-8-13

cont. 3/

Entonces, queda:

+ C. Variable

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{F} d\vec{s} &= \iiint_M \text{div. } \vec{F} d\text{vol} = \iiint_M 3 \cdot d\text{vol} \stackrel{+ \text{C. Variable}}{=} 3 \left[\iiint_{M_1} r d\text{vol} + \iiint_{M_2} r d\text{vol} \right] = \\
 &= 3 \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{7}} \int_2^3 r dz dr dt + \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{12}} \int_2^{\sqrt{16-r^2}} r dz dr dt \right] = \\
 &= 3 \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{7}} r(3-z) dr dt + \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{12}} r(\sqrt{16-r^2} - 2r) dr dt \right] = \\
 &= 3 \left[\int_0^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^{\sqrt{7}} dt + \int_0^{2\pi} \left. -\frac{1}{3} \sqrt{(16-r^2)^3} \right|_{\sqrt{7}}^{\sqrt{12}} - r^2 \right|_{\sqrt{7}}^{\sqrt{12}} dt \right] = \\
 &= 3 \left[\int_0^{2\pi} \frac{7}{2} dt + \int_0^{2\pi} \underbrace{-\frac{1}{3} \left(\overset{-19}{8-27} \right)}_{19/3} - 12 + 7 dt \right] = \\
 &= 3 \left[\frac{7}{2} \cdot 2\pi + \frac{4}{3} \cdot 2\pi \right] = 3\pi \left[7 + \frac{8}{3} \right] = 3\pi \cdot \frac{29}{3} = 29\pi
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F} d\vec{s} = 29\pi}$$

1-8-13

④ Calcular la masa de la superficie

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 3, x \leq y\}$$

Sabiendo que la densidad superficial de masa en cada punto es proporcional a la distancia del punto al plano xy .

• Analiza la densidad: $\delta(x, y, z) = K |z| \xrightarrow{z \geq 0} \boxed{\delta(x, y, z) = Kz}$

• Analiza la forma de E y la parametrizo

$$4z^2 = x^2 + y^2 \rightarrow (2z)^2 = x^2 + y^2 \rightarrow |2z| = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{z \geq 0} \boxed{z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}}$$

Es un semicono "positivo" por $z \geq 0$ cortado por dos planos:

$$z = 3 \wedge x = y$$

$$\begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \sin(t) \\ z = z \end{cases} \rightarrow z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} = \frac{\sqrt{r^2}}{2} = \frac{r}{2} = z$$

$$\boxed{\varphi(r, t) = \left(r \cos(t), r \sin(t), \frac{r}{2} \right)} \quad r \in [0, 6]$$

$$t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]$$

$$\varphi'_t = (-r \sin(t), r \cos(t), 0)$$

$$\varphi'_r = \left(\cos(t), \sin(t), \frac{1}{2} \right) \Rightarrow N = \left(\frac{r \cos(t)}{2}, \frac{r \sin(t)}{2}, -r \right)$$

Para utilizar integral de Superficie necesitamos $\|N\|$

$$\|N\| = \sqrt{\left(\frac{r \cos(t)}{2} \right)^2 + \left(\frac{r \sin(t)}{2} \right)^2 + (-r)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{r^2 \cos^2(t)}{4} + \frac{r^2 \sin^2(t)}{4} + r^2} =$$

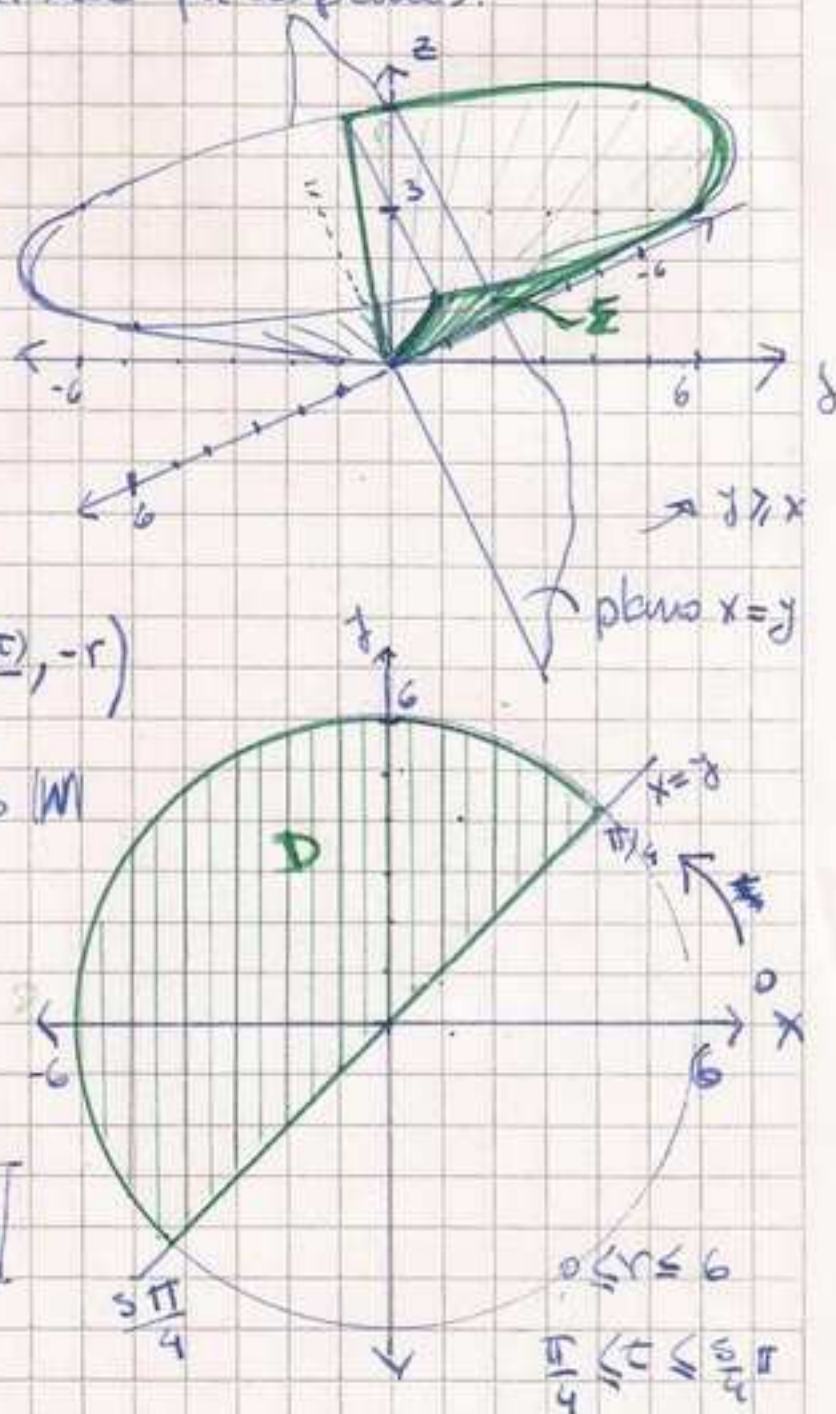
$$= \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} = \sqrt{\frac{5}{4} r^2} \xrightarrow{r \geq 0} \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2} r = \|N\|}$$

Entonces:

$$\iint_E \delta(x, y, z) dE = \iint_D \delta(\varphi(r, t)) \cdot \|N\| dr dt =$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_0^6 K \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} r dr dt = \frac{K\sqrt{5}}{4} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left(r^2 dr \right) dt = \frac{K\sqrt{5}}{4} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^6 \right) dt = 18\sqrt{5}K \int_{\pi/4}^{5\pi/4} dt =$$

$$= 18\sqrt{5}K \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \boxed{K 18\sqrt{5} \pi = \iint_E \delta(x, y, z) dE}$$



③ Sean $U = (0, +\infty) \times (1, +\infty)$ y $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{1-y}\right)$ con $(x,y) \in U$

a) Hallar las líneas de campo y las curvas equipotenciales de $\vec{F}$.

b) Si $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ graficar en un mismo gráfico la L.C. de $\vec{F}$ que pasa por P , la curva equipotencial que pasa x el mismo punto y $\vec{F}(P)$

a) Primero analizo el campo vectorial

$$\text{Sea } \vec{F}(x,y) = (F_1, F_2)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \rightarrow \text{continua en } U$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \rightarrow \text{continua en } U$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{continua en } U$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{1}{(1-y)^2} \rightarrow \text{continua en } U$$

Las componentes de $\vec{F}$ tienen derivadas primeras y, además, son continuas en $U \rightarrow \vec{F} \in C^1(U)$, $\text{Dom } \vec{F} = U \rightarrow$ simplemente conexo ①

Ahora, analizo si su matriz jacobiana es simétrica $\rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ ②

Como se cumplen ① y ② entonces $\vec{F}$ es un campo conservativo

Definición de línea de campo

La L.C. es una línea para la que, en cada punto el campo $\vec{F}$ es tangente

$$C: \vec{\gamma}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ (en este caso)} \rightarrow \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) = \vec{\gamma}'(t)$$

$$\frac{dx}{\frac{1}{x}} = \frac{dy}{\frac{1}{1-y}} \rightarrow x dx = (1-y) dy \rightarrow \underbrace{x dx}_{P(x,y)} + \underbrace{(-1+y) dy}_{Q(x,y)} = 0$$

$x dx + (-1+y) dy = 0$ es una ec. diferencial exacta pues $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ✓

Como $\vec{F}$ es campo conservativo, $\rightarrow \vec{F}(x,y) = \nabla \varphi(x,y) \rightarrow$ busco la función potencial $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = (P(x,y), Q(x,y))$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = x & \xrightarrow{\text{integración m.a.m.}} \varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \alpha(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -1+y & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \alpha'(y) \stackrel{(*)}{=} -1+y \rightarrow \alpha(y) = -y + \frac{y^2}{2} + C \end{cases}$$

$$\rightarrow \varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - y + C \rightarrow \text{esta es la función potencial}$$

La solución general de la ec. diferencial exacta es

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - y = -C \quad \equiv \quad x^2 + y^2 - 2y = K \quad \equiv \quad \boxed{x^2 + (y-1)^2 = \overset{K_1}{K+1}}$$

1-8-13

cont. 5

o sea, las líneas de campo están dadas por

$$\boxed{x^2 + (y-1)^2 = K_1} \rightarrow \text{circ. centro } (0,1) \text{ radio } \sqrt{K_1}$$

Las curvas equipotenciales son ortogonales a las líneas de campo $\rightarrow$ son las rectas que pasan por $(0,1) \rightarrow$

$$\boxed{y = K_2 x + 1}$$

curvas equipotenciales

$$K, K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

b) $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right)$

L.C.: $x^2 + (y-1)^2 = K_1$ en P $\rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 1 \right)^2 = K_1$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 = K_1$$

• Las líneas de campo que pasan por P está definida por

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \rightarrow \text{circ. centro } (0,1) \text{ radio } 1$$

• Las curvas equipotencial que pasa por P es la recta que une a P con $(0,1)$

• $\vec{F}(P) = \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \frac{1}{1 - \frac{3}{2}} \right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -2 \right)$

