[redacted] [redacted]

4.-

Interesa $\iint_D (2x-y)^2 \cdot \operatorname{sen}^2(2x+y)\,dx\,dy$.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; -\pi \leq y-2x \leq \pi \;,\; \pi \leq 2x+y \leq 3\pi\}$.

Sea ; $v = 2x+y$; $u = y-2x$

$\Rightarrow \dfrac{u+v}{2} = y$; $\dfrac{u-v}{4} = x$.

Sea $T: [-\pi,\pi] \times [\pi, 3\pi] \longrightarrow D \;|\; \vec{T}(u,v) = \left(\dfrac{u-v}{4}, \dfrac{u+v}{2}\right)$

entonces, por ser T inyectiva $C^1(D_T)$ y el teorema del cambio de variables:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_T} f(X,Y)\left|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

$$= \int_\pi^{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (-u)^2 \cdot \operatorname{sen}^2(v) \cancel{du\,dv} \left|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

$$\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{4}\int_\pi^{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u^2 \cdot \operatorname{sen}^2(v)\,du\,dv =$$

$$\frac{1}{4}\int_\pi^{3\pi}\left[\operatorname{sen}^2(v)\cdot\frac{1}{3}u^3\right]_{u=-\pi}^{u=\pi} dv = \frac{1}{4}\int_\pi^{3\pi}\operatorname{sen}^2(v)\cdot\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{u=-\pi}^{u=\pi} dv =$$

$$\frac{1}{12}\int_\pi^{3\pi}\operatorname{sen}^2 v\,(\pi^3+\pi^3)\,dv = \frac{\pi^3}{6}\cdot\int_\pi^{3\pi}\operatorname{sen}^2 v\,dv = \frac{\pi^3}{6}\cdot\left[\frac{1}{2}v - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2v\right]_{v_1}^{v_2} =$$

$$= \frac{\pi^3}{6}\cdot\left[\left(\frac{3\pi}{2} - \cancel{\frac{1}{4}\operatorname{sen}6\pi}^{\,0}\right) - \left(\frac{1}{2}\pi - \cancel{\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\pi}^{\,0}\right)\right] =$$

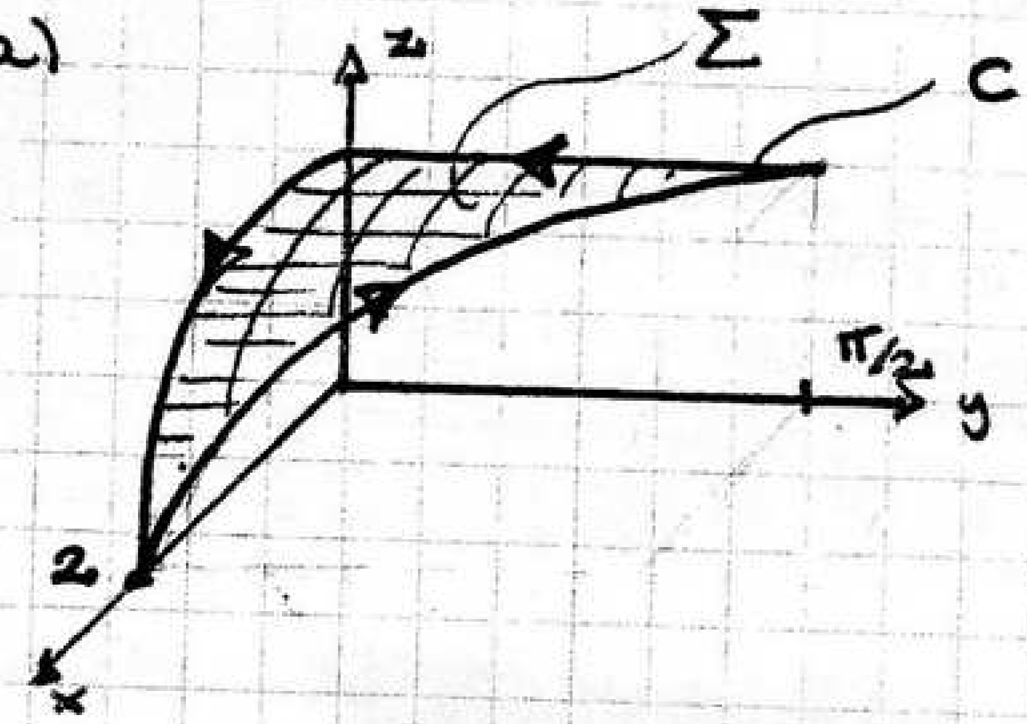
$$= \frac{\pi^3}{6}\cdot\left[\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\pi\right] = \frac{\pi^4}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_D (2x-y)^2 \cdot \operatorname{sen}^2(2x+y)\,dx\,dy = \frac{\pi^4}{6}.}$$

[redacted] [redacted]

5.-

(a)



(b) Interesa: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$.

$\vec{F}\in C^1$ (ct.p D_F) ; D_F es un asc ; C es la curva «borde» de Σ

$D_F \supset C \cup \Sigma$; Σ es regular en ct.p

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \iint_\Sigma \vec{\nabla}\times\vec{F}(x,y,z)\cdot \check{n}\, dS.$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = (\overset{0}{\cancel{R_y(x,z)}} - \overset{0}{\cancel{(Q(y)-2x)_z}},\ P_z(x,z) - R_x(x,z),\ (Q(y)-2x)_x - P_y(x,z))$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = (0,\ P_z(x,z) - R_x(x,z),\ -2).$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F}\, d\vec{\ell} = \iint_\Sigma (0,\ P_z(x,z) - R_x(x,z), -2)\cdot \check{n}\, dS.$$

pero $\check{n}$ no tien componente y, pues todos los «trazos» ~~de recta~~ por los que está formado Σ, son paralelos al eje y.

¿cual? $\iint_\Sigma (-2)(2z)\,dS = \iint_S (-4)\,\mathrm{sen}\,u\,du\,dv$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F}\, d\vec{\ell} = \iint_\Sigma -2\, dS \Rightarrow -2\iint_\Sigma dS \quad (\text{el área de } \Sigma \text{ por } -2).$$

ya que $\bar{n} = (2x, 0, 2z)|_\Sigma = (+6\cos u, 0, +6\,\mathrm{sen}\,u)$

$$A(\Sigma) = \iint_\Sigma dS = \int_0^{\pi/2}\int_0^u \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|\, du\, dv.$$

$$\|\vec{X}_u\times\vec{X}_v\| = \left\|\begin{matrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -2\sin u & 0 & 2\cos u \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\| = \|(-2\cos u, 0, -2\sin u)\| = 4.$$

$$\Rightarrow \cancel{\oint_C \vec{F}\, d\vec{\ell} = -8} \Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{F}\, d\vec{\ell} = -8}$$

¿cual?

[signature]

[redacted] [redacted]

1.- $f(x,y) = x.y$; sea $E = \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \}$.

$\Rightarrow$ Interesa hallar los extremos de $f|E$.

Sea $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \longrightarrow E \mid \vec{\sigma}(t) = (3.\cos t, 2\sin t)$.

$\Rightarrow f|E \equiv f(\vec{\sigma}(t)) = 6\cos t.\sin t$

Si existen extremos para $f|E$, entonces se alcanzarán en los puntos de E para los cuales la derivada de $f(\vec{\sigma}(t))$ es cero:

$6.(-\sin t.\sin t + \cos t.\cos t) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 t = \sin^2 t \Leftrightarrow \cos t = \pm \sin t$.

entonces, si en algún punto de E hay un extremo, será en uno de los cuatro puntos:

$p_1 = \sigma(\pi/4)$; $p_2 = \sigma(3/4\,\pi)$; ~~$p_3 = \sigma(\frac{5}{4}\pi)$~~ ;

$p_3 = \sigma(5/4\,\pi)$; $p_4 = \sigma(\frac{7}{4}\pi)$.

el criterio de la derivada segunda para $f(\sigma(t))$ [que es una función real de variable real], me permite clasificar ~~los~~ sus extremos:

$f(\sigma(t))'' = 6.(-2\sin t.\cos t + 2\cos t.(-\sin t))$ ~~$= \ldots$~~ $= -24.\sin t.\cos t$.

[redacted] $f\circ\sigma''(\pi/4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right).-24 < 0$ en $\sigma(\pi/4)$ $f|E$ alcanza un máx

$f\circ\sigma''(3/4\,\pi) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}.-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).-24 > 0$ en $\sigma(3/4\,\pi)$ $f|E$ alcanza un mín

$f\circ\sigma''(5/4\,\pi) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}.-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).-24 < 0$ en $\sigma(5/4\,\pi)$ $f|E$ alcanza un máx

$f\circ\sigma''(7/4\,\pi) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right).-24 > 0$ en $\sigma(\frac{7}{4}\pi)$ $f|E$ alcanza un mín.

$\Rightarrow$ el mínimo absoluto de $f|E$ es -3 en $\left(-3\frac{\sqrt{2}}{2}, \cancel{2}.\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)$ y $\left(3.\frac{\sqrt{2}}{2}, -\cancel{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

el máximo absoluto de $f|E$ es 3 en $\left(-3\frac{\sqrt{2}}{2}, -\cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)$ y $\left(\cancel{-2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}, -3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Mínimo absoluto de -3 en $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{3.\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

Máximo absoluto de 3 en $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, -3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

perfecto!

[redacted] [redacted]

2\. $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4 , \quad y \leq z \leq 3y\}$.

$$\bar{y} = \frac{\iiint_W y \cdot \delta(x,y,z) \cdot dV}{\iiint_W \delta(x,y,z)\, dV} \quad \text{pero} \quad \delta(x,y,z) \text{ es cte.}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \cancel{\frac{\delta(x,y,z)}{\delta(x,y,z)}} \cdot \frac{\iiint_W y \cdot dV}{\iiint_W dV} \quad / \quad \text{pero} \quad \iiint_W dV = 16/3 .$$

$$\Rightarrow \frac{3 \iiint_W y \cdot dV}{16} = \bar{y} .$$

utilizando el cambio a cilíndricas y multiplicando por r (el Jacobiano de la transformación) Resulta

mal π

$$\iiint_W y \cdot dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r\sin\theta}^{3r\sin\theta} r\sin\theta \cdot r \, dz\, d\theta\, dr =$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) \cdot [\, 3r\sin\theta - r\sin\theta \,]\, d\theta\, dr =$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} 3r^3 \sin^2\theta - r^3 \sin^2\theta \; d\theta\, dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 \cdot (3\sin^2\theta - \sin^2\theta)\, d\theta\, dr =$$

$$2 \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2\theta \, d\theta\, dr = 2 \cdot \int_0^2 r^3 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta\, dr =$$

$$2 \cdot \int_0^2 r^3 \cdot \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 2\int_0^2 r^3 \cdot \left(\frac{\pi \cancel{2}}{\cancel{2}} - 0\right) dr =$$

$$2\pi \cdot \int_0^2 r^3\, dr = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{r=2} = 2\pi \cdot [\,4\,] = 8\pi .$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{3}{\cancel{16}_{2}} \cdot \cancel{8}\pi \Longrightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{3}{2}\pi .}$$ mal

[redacted] [redacted]

3.- $\vec{F}(x,y) = (\underbrace{4x-3y^2}_{P(x,y)}, \underbrace{y^2-6xy}_{Q(x,y)})$.

$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -6xy$; $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -6y$ $\Rightarrow$ ★ $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ que es un a.s.c.

$\Rightarrow$ existe una $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $\vec{\nabla}\varphi(x,y) = \vec{F}(x,y)$.

para φ, $\varphi_x = P(x,y)$ $\varphi_y = Q(x,y)$.

$\Rightarrow \varphi(x,y) = \int (4x-3y^2)\,dx = 2x^2 - 3x.y^2 + k(y)$.

$\varphi_y(x,y) = -\cancel{6xy} + k'(y) = Q(x,y) = y^2 \cancel{-6xy} \Rightarrow k(y) = \frac{1}{3}y^3 + C$

$\Rightarrow \varphi(x,y) = 2x^2 + \frac{1}{3}y^3 - 3x.y^2 + C$.

Además, quedar satisfecho lo expuesto en ★ es equivalente a que $\vec{F}$ es un campo conservativo; i.e.: la circulación de $\vec{F}$ sobre Γ, sólo depende de los valores extremos de Γ y, además:

$$\int_{\Gamma} \vec{F}\,d\vec{l} = \varphi(\vec{g}(\pi/2)) - \varphi(\vec{g}(0))$$

$\vec{g}(\pi/2) = (0,3)$; $\vec{g}(0) = (3,0)$.

$\Rightarrow \int_{\Gamma} \vec{F}\,d\vec{l} = \varphi(0,3) - \varphi(3,0) = \left(\frac{1}{3}3^3\right) - \left(2.3^2\right) = 9 - 18 = -9$

$\Rightarrow \boxed{\int_{\Gamma} \vec{F}\,d\vec{l} = -9}$ ✓