Criterio del Hessiano:

Sea $f: U \subset R^2 \to R$, una función de clase C^2 y (x_0, y_0) un punto crítico para f interior al conjunto U, es decir $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$. Queremos determinar si (x_0, y_0) es un máximo, un mínimo o un punto silla para f.

Para eso debemos estudiar el signo de la diferencia:
$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ en un entorno de (x_0, y_0).

Recordando el teorema de Taylor y que $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$, se tiene:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2\right] + R_2(h,k)$$

con $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{R_2(h,k)}{\|(h,k)\|^2} = 0$.

Resulta entonces,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2\right] + R_2(h,k)$$

Ec (1)

Se puede demostrar que el signo de $Q(h,k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ sólo depende del signo de la expresión entre corchetes para (h,k) en un entorno de $(h = 0, k = 0)$, siempre que el corchete no sea idénticamente nulo.

<u>Criterio del Hessiano para funciones de 2 variables</u>

Si llamamos

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0); \quad b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0); \quad c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

Entonces:

a) Si $ac - b^2 > 0$ y $a > 0$, entonces f tiene un mínimo local en (x_0, y_0).
b) Si $ac - b^2 > 0$ y $a < 0$, entonces f tiene un máximo local en (x_0, y_0).
c) Si $ac - b^2 < 0$, entonces f tiene un punto silla en (x_0, y_0).
d) Si $ac - b^2 = 0$, el criterio no provee información. Es decir que f puede tener un máximo local, mínimo local o punto silla en (x_0, y_0).

Demostración:

Vimos que f tendrá un extreme o punto silla dependiendo del signo del corchete en la Ec (1).

*) Si suponemos que $a \neq 0$ completando cuadrados resulta:

$$Q(h,k) = \frac{1}{2}\left[ah^2 + 2bhk + ck^2\right] = \frac{1}{2a}\left[a^2h + 2abhk + b^2k^2 - b^2k^2 + ack^2\right] = \frac{1}{2a}\left[(ah+bk)^2 + (ac-b^2)k^2\right]$$

Caso i: $(ac - b^2) > 0$

La expresión entre corchetes es positiva $\forall\ (h,k)$ pues es la suma de dos cuadrados y en ese caso el signo de $Q(h,k)$ depende del signo de a :

Si $a > 0$ entonces $Q(h,k) > 0$ en cuyo caso el punto (x_0, y_0) es un mínimo.

Si $a < 0$ entonces $Q(h,k) < 0$ en cuyo caso el punto (x_0, y_0) es un máximo.

Caso ii: $(ac - b^2) < 0$

En puntos de la forma $(h,0)$ resulta $Q(h,0) = \frac{1}{2}ah^2$ tiene el mismo signo que a.

En puntos de la forma $(-\frac{bk}{a}, k)$ $k \neq 0$ resulta $Q(-\frac{bk}{a}, k) = \frac{1}{2a}(ac - b^2)k^2$ tiene el signo opuesto de a.

Por lo tanto en un entorno de (x_0, y_0) la diferencia $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ toma valores positivos y negativos y entonces el punto (x_0, y_0) no es ni máximo ni mínimo. Se dice un punto silla.

*) Si $a = 0$ y $ac - b^2 \neq 0$ implica que $b \neq 0$ y entonces

$$Q(h,k) = \frac{1}{2}[2bhk + ck^2] = \frac{k}{2}[2bh + ck]$$

Dejamos que el alumno demuestre que si dividimos el plano (k,k) en cuatro regiones limitadas por las rectas $k = 0$ y $2bh + ck = 0$, $Q(h,k)$ va cambiando de signo y por lo tanto f tiene un punto silla en (x_0, y_0).

*) Faltaría analizar el caso en que $ac - b^2 = 0$. Si consideramos las funciones $f(x,y) = x^4 + y^4$, $g(x,y) = -(x^4 + y^4)$ y $h(x,y) = x^4 - y^4$, dejamos para el alumno que demuestre que el punto $(0,0)$ es un punto crítico, que $ac - b^2 = 0$ y que f, g y h tienen un mínimo local, máximo local y punto silla respectivamente.

Generalización del criterio del Hessiano a funciones de N variables

Ahora enunciaremos (sin demostración) una generalización del criterio del Hessiano anterior para funciones de N variables[1].

Antes de enunciar el criterio vamos a definir los subdeterminantes de la matriz Hessiana

Sea $Hf(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{N0})$ la matriz Hessiana de la función $f \in C^2$ en un punto $\boldsymbol{X_0} = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{N0})$ interior del dominio de f.

$$Hf(\boldsymbol{X_0}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_N}^2} \end{pmatrix}_{(\boldsymbol{X_0})} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

Definimos los subdeterminantes como:

$$\Delta_1 = a_{11}, \ \ \Delta_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \dots \ \Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \text{ con } 1 \leq k \leq \mathrm{N}$$

[1] Para su explicación más detallada es necesario el concepto de forma cuadrática asociada a la matriz Hessiana y el criterio de Sylvester.

Criterio del Hessiano para funciones de N variables

Sea $f: U \subset R^N \rightarrow R$, una función de clase C^2 y $\boldsymbol{X_0} \in U$ un punto crítico para f interior al conjunto U. Si Δ_k son los subdeterminantes de la matriz Hessiana $Hf(\boldsymbol{X_0})$ entonces:

*) Si $\Delta_k > 0$, para todo $k = 1, \dots, N$, entonces f tiene un mínimo relativo en $\boldsymbol{X_0}$.

*) Si $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ …. , es decir los subdeterminantes van alternando el signo comenzando con $a_{11} < 0$ para todo $k = 1, \dots, N$, entonces f tiene un máximo relativo en $\boldsymbol{X_0}$.

*) Si $det[Hf(\boldsymbol{X_0})] \neq 0$ y no se cumplen ninguno de los casos anteriores entonces f tiene un punto silla en $\boldsymbol{X_0}$.

Si el $det[Hf(\boldsymbol{X_0})] = 0$ el criterio no provee información.