

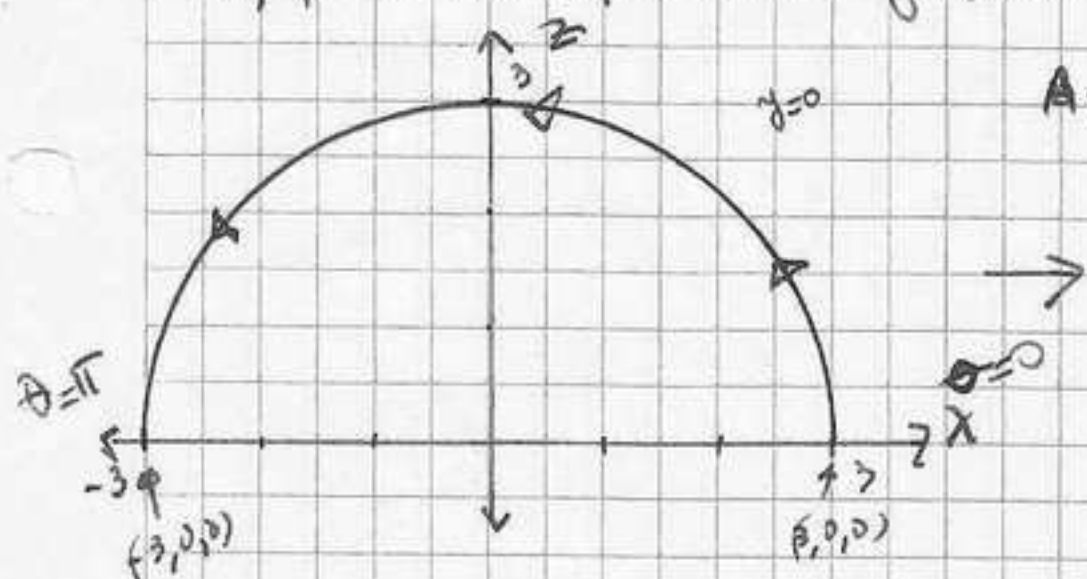
① La circulación de un campo vectorial $\vec{F} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ sobre la curva parametrizada

por: $\vec{\gamma}(t) = (3 \cos(t), 0, 3 \sin(t)) \quad 0 \leq t \leq \pi$

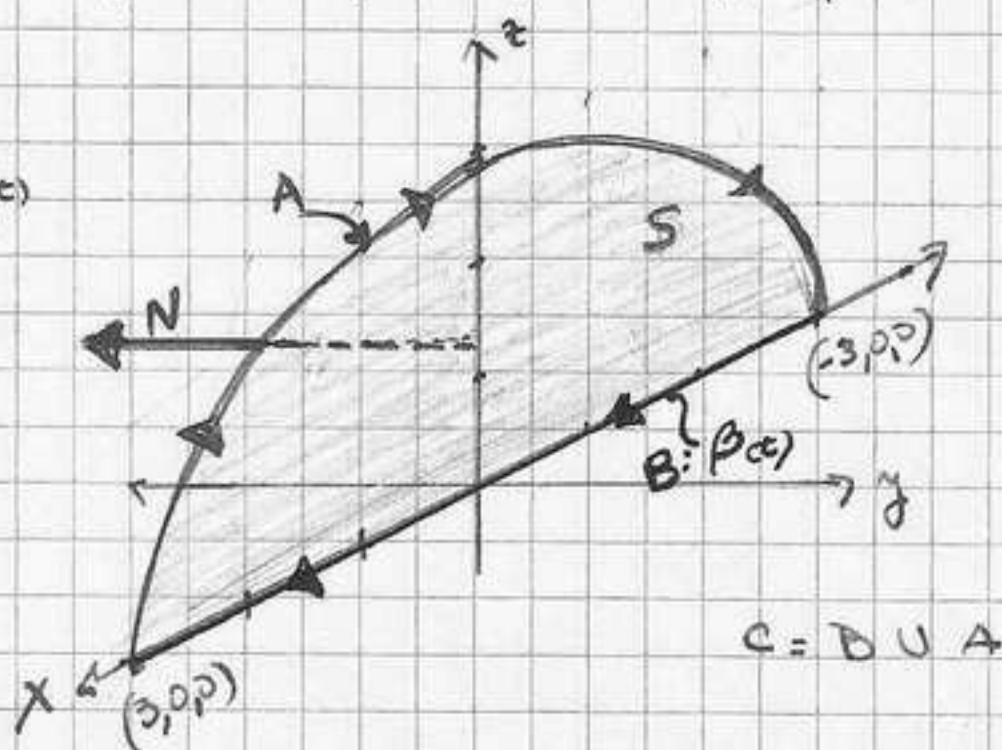
es igual a 18. La curva está orientada según la parametrización dada.

Calcular la circulación de $\vec{F}$ a lo largo del eje x desde $(-3, 0, 0)$ hasta $(3, 0, 0)$, sabiendo que $\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = (2z, -z, 1)$

Para analizar la curva parametrizada por $\vec{\gamma}(t)$, la voy a dibujar en el plano xz , pues la componente de y es cero:



A: $\vec{\gamma}(t)$



Se puede calcular la circ. sobre la recta que une $(-3, 0, 0)$ a $(3, 0, 0)$. La parametrización

Sea $\vec{\beta}: \beta(t) = (t, 0, 0) \quad t \in [-3, 3] \quad \beta(-3) = (-3, 0, 0) \quad \beta(3) = (3, 0, 0)$

Al dibujar C se puede observar que queda una región S cuyo borde es $C = B \cup A$

Utilizando la regla de la mano derecha dibujo la Normal, que apunte hacia $-y$

Entonces tengo que:

- S es una sup. suave orientable, $C^2 \rightarrow S: \vec{\sigma}(x, z) = (x, 0, z)$
 $\vec{\sigma}'_x = (1, 0, 0) \quad \vec{\sigma}'_z = (0, 0, 1) \rightarrow \vec{N} = (0, -1, 0) \rightarrow \|\vec{N}\| = 1$
- $C = \partial S$ → curva suave (a trozos) orientada positivamente
- $\vec{F} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ x unido

Como se cumplen las hipótesis se puede utilizar el t. de Stokes para calc. circ:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{e} = \iint_S \text{rot.} \vec{F} d\vec{s} = \iint_S (2z, -z, 1) \cdot (0, -1, 0) dS = \iint_S z dS \rightarrow \text{paso a coord. cilíndricas}$$

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, 0, r \sin \theta)$$

$$0 \leq r \leq 3$$

$$\text{Jacobiano} = r$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

Cont. 1/

+ C. Variable

$$\iint_S z \, ds = \iint_{S^+} \underbrace{r}_{\substack{\uparrow \\ \text{Jacobiano}}} \cdot \underbrace{r \sin \theta}_z \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^3 r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \sin \theta \cdot \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^3 d\theta = \int_0^\pi 9 \sin \theta \, d\theta = -9 \cos \theta \Big|_0^\pi = 18 = \oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$C = B \cup A \rightarrow \oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_B \vec{F} \cdot d\vec{l}}_{\text{Iniciamos}} + \underbrace{\int_A \vec{F} \cdot d\vec{l}}_{\text{Lado enunciado}}$$

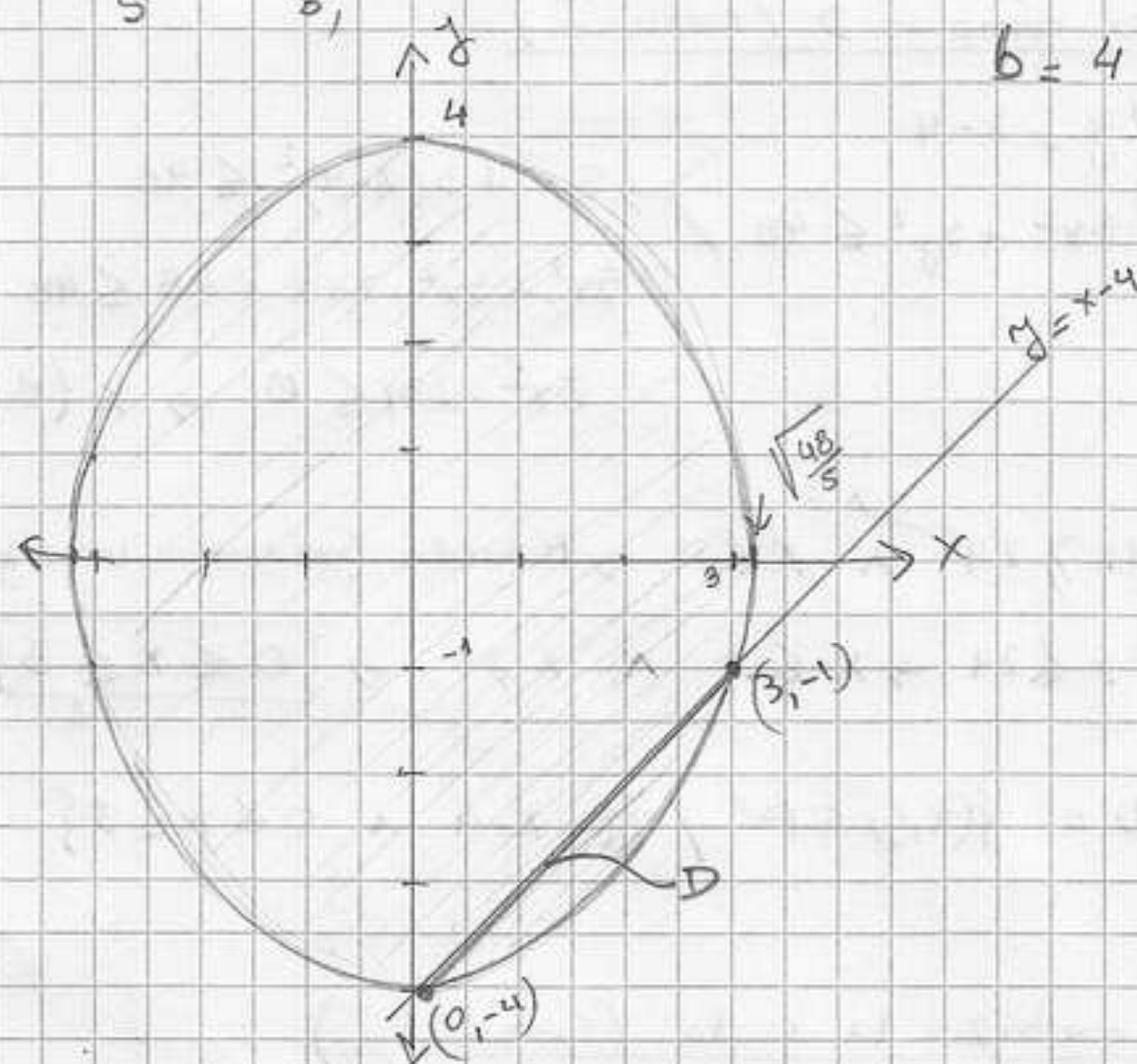
$$\rightarrow \int_B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{l} - \int_A \vec{F} \cdot d\vec{l} = 18 - 18 = 0$$

$$\boxed{\int_B \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0}$$

$$D: \begin{cases} y = x - 4 \\ 5x^2 + 3y^2 \leq 48 \end{cases}$$

$$5x^2 + 3y^2 \leq 48 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{48}{5}} + \frac{y^2}{\frac{48 \cdot 5}{3}} \leq 1 \rightarrow \text{ellipse centered at } (0,0). \quad a = \sqrt{\frac{48}{5}}$$

$$b = 4$$



② Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = xy + 4$

soluto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x-4, 5x^2 + 3y^2 \leq 48\}$

Análisis cómo es D (restricción)

$$D: \begin{cases} y = x-4 \\ 5x^2 + 3y^2 \leq 48 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x^2 + 3(x-4)^2 \leq 48 \\ 5x^2 + 3x^2 - 24x + 48 \leq 48 \end{cases}$$

$$8x^2 - 24x \leq 0 \rightarrow x(8x - 24) \leq 0 \rightarrow \begin{matrix} \textcircled{1} x \leq 0 \wedge 8x - 24 > 0 \\ \textcircled{2} x \geq 0 \wedge 8x - 24 \leq 0 \end{matrix}$$

$$\textcircled{1} 8x > 24 \xrightarrow{x \geq 3} \wedge x \leq 0 \rightarrow \text{Absurdo (porque es imposible)}$$

$$\textcircled{2} 8x \leq 24 \rightarrow x \leq 3 \wedge x \geq 0 \rightarrow \boxed{0 \leq x \leq 3}$$

A = pto inicial de la recta
B = pto. final de la recta

$$\rightarrow D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x-4 \wedge 0 \leq x \leq 3\} \rightarrow y_1 = 0-4 \rightarrow A = (0, -4)$$

$$\rightarrow y_2 = 3-4 \rightarrow B = (3, -1)$$

Parametrizo la recta (restricción)

$$y = x-4 \rightarrow \vec{\alpha}(t) = (t, t-4) \quad t \in [0, 3]$$

Busco Puntos Críticos:

$$\text{sea } \tilde{h}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid h(t) = f(\vec{\alpha}(t)) = \tilde{t} \cdot (\tilde{t}-4) + 4 = t^2 - 4t + 4 = h(t)$$

$$\text{Extremos de } \vec{\alpha}(t) \rightarrow \boxed{PC_1 = (0, -4)} \quad \boxed{PC_2 = (3, -1)}$$

2) Derivo $h(t)$ y veo para qué valor/es de t se anula:

$$h'(t) = 2t - 4 = 0 \rightarrow t = 2 \rightarrow PC_3 = \vec{\alpha}(2) = \boxed{(2, -2) = PC_3}$$

Como la restricción es un conjunto compacto (cerrado y acotado) puedo utilizar el teorema de Weierstrass, que me asegura que existe, al menos, un máx. y un mín. absolutos. Entonces, evalúo f en los PC y comparo valores:

$$f(PC_1) = f(0, -4) = 4$$

$$f(PC_2) = f(3, -1) = 1$$

$$f(PC_3) = f(2, -2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} f \text{ alcanza Máximo absoluto en } (0, -4) \\ f \text{ alcanza Mínimo absoluto en } (2, -2) \end{cases}$$

③ Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que la ec. dif.

$$(2xy - ay) dx + (x^2 - bx) dy = 0$$

Sea exacta y se satisfaga que la curva que solución que pasa por $(1,1)$ sea en este punto ortogonal a la recta de ecuación $2x + 3y = 5$

$$\text{Sea } P(x,y) = 2xy - ay \quad \text{y } Q(x,y) = x^2 - bx$$

$$P, Q \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

por ser polinomios

$$\text{para que sea exacta } \rightarrow P'_y = Q'_x$$

$$\text{Sea } L: 2x + 3y = 5$$

$$P'_y = 2x - a$$

$$Q'_x = 2x - b \quad \rightarrow \quad P'_y = Q'_x \rightarrow \boxed{a = b}$$

$$\text{Sea } \vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \rightarrow \vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

$$\text{Don } \vec{F} = \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{simplemente conexo} \quad \left. \begin{array}{l} P'_y = Q'_x \rightarrow \text{Jacobiano simétrico} \end{array} \right\} \therefore \vec{F} \text{ es conservativo}$$

$$P'_y = Q'_x \rightarrow \text{Jacobiano simétrico}$$

$$\vec{F} \text{ conservativo } \rightarrow \vec{F} = \nabla \varphi \rightarrow \text{sea } \nabla \varphi = (P(x,y), Q(x,y)) \text{ Busco la función potencial}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = 2xy - ay \xrightarrow{\text{integrando}} \varphi(x,y) = x^2y - axy + \alpha(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = x^2 - bx \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 - ax + \alpha'(y) \stackrel{(1)}{=} x^2 - bx \rightarrow \alpha'(y) = 0 \rightarrow \alpha(y) = C$$

$$\varphi(x,y) = x^2y - axy + C \rightarrow \text{Solución: } x^2y - axy = K$$

$$\text{La solución que pasa por } (1,1) \rightarrow 1 - a = K \rightarrow \boxed{x^2y - axy = 1 - a}$$

$$\text{Para que esta solución sea } \perp L \rightarrow \nabla \varphi \perp \vec{u} \quad \text{donde } \vec{u} \text{ es vector } \perp \text{ a } L$$

$$L: 2x + 3y = 5 \rightarrow \vec{u} = (2, 3) \rightarrow \text{es } \perp \text{ a } L$$

$$\therefore \nabla \varphi(1,1) \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow \nabla \varphi(1,1) = ((2 \cdot 1 \cdot 1 - a \cdot 1), (1^2 - a \cdot 1)) = (2 - a, 1 - a)$$

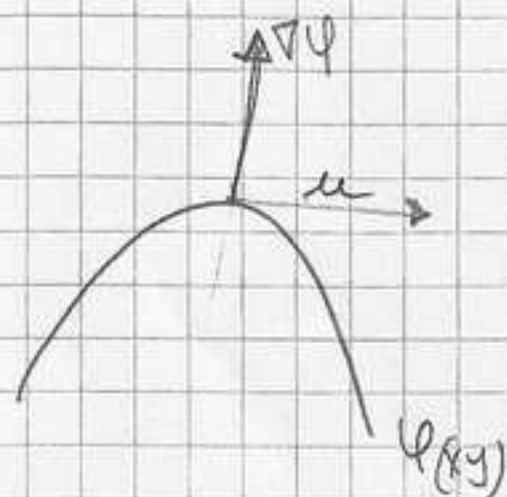
$$(2 - a, 1 - a) \cdot (2, 3) = 0$$

$$2(2 - a) + 3(1 - a) = 0$$

$$4 - 2a + 3 - 3a = 0$$

$$7 = 5a \rightarrow \boxed{a = 7/5}$$

$$\boxed{b = 7/5}$$



④ Hallar la long. del trozo de curva.

$$\mathbb{L} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, x = \cos(z), 0 \leq z \leq \pi, y \geq 0 \}$$

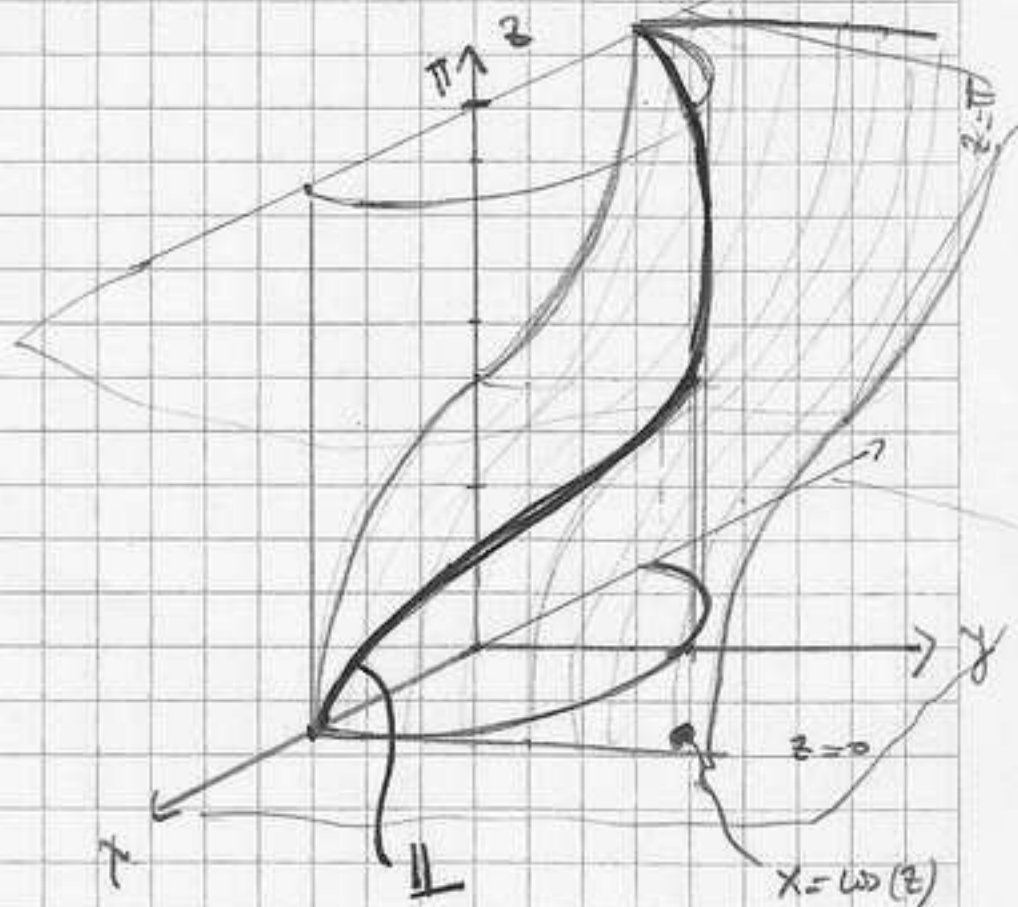
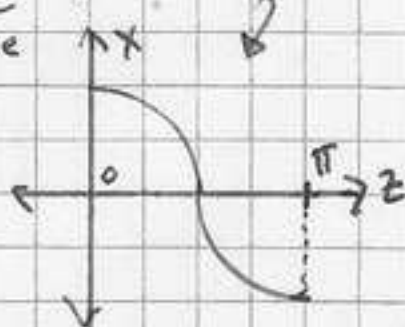
Primer análisis y dibujo $\mathbb{L}$:

$\mathbb{L}: x^2 + y^2 = 1 \rightarrow$ cilindro radio 1
centro $(0, 0, z)$

$y \geq 0 \rightarrow$ Semicilindro con $y \geq 0$

$0 \leq z \leq \pi \rightarrow z$ ^{acotado} ~~entre~~ x 2 planos

$x = \cos(z) \rightarrow$ en el plano xz
 _{y libre}



Parametrizo $\mathbb{L}$:

$$\vec{r}'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$$

$$\mathbb{L} = \vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t) \quad t \in [0, \pi]$$

$$\begin{aligned} \text{long}_{\mathbb{L}} &= \int_{\mathbb{L}} 1 \cdot dl = \int_{\vec{r}^*(t): \vec{r}(t)} \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2} dt = \\ &= \int_0^\pi \sqrt{\underbrace{\sin^2(t) + \cos^2(t)}_1 + 1} dt = \int_0^\pi \sqrt{2} dt \rightarrow \boxed{\text{long}_{\mathbb{L}} = \sqrt{2} \pi} \end{aligned}$$

⑤ Hallar el Flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (y-z, 9(x,z), 2z)$ $9 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a través de la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ con $z \geq 6 - 2x$. Indicar en un gráfico el sentido de la normal utilizada.

Análisis la superficie:

Sea: $S_1: \begin{cases} z = 9 - x^2 - y^2 \\ z \geq 6 - 2x \end{cases} \rightarrow$ paraboloide invertido con máx. en $(0,0,9)$
 todos los pts que están por encima del plano $2x + z = 6$

Sea S_2 el disco ^{elíptico} sobre el plano $z = 6 - 2x$ con borde de intersección del plano con el paraboloide

Entonces $S = S_1 \cup S_2$
 frontera

$S = \partial W$ donde W es el sólido que queda dentro de las sup S_1 y S_2

• W es una región de $\mathbb{R}^3$,

• S , su frontera, es una sup. orientada al exterior

• $\vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ pues sus componentes son C^∞ en $(\mathbb{R}^3)$ x munc. y por ser polinomios

Como se cumplen estas hipótesis, puedo utilizar el teorema de Gauss o de la divergencia para ~~calcular~~ calcular el Flujo solicitado

$$\iint_{S_1} \vec{F} d\vec{s} + \iint_{S_2} \vec{F} d\vec{s} = \iint_S \vec{F} d\vec{s} = \iiint_W \text{div.} \vec{F} \cdot d\text{vol}$$

$$\text{div.} \vec{F} = \frac{\partial (y-z)}{\partial x} + \frac{\partial (9(x,z))}{\partial y} + \frac{\partial (2z)}{\partial z} = 0 + 0 + 2 = \boxed{2 = \text{div.} \vec{F}}$$

Por la forma que tiene W me va a convenir usar coord. cilíndricas.

Busco $S_1 \cap S_2$:

$$C: \begin{cases} z = 9 - x^2 - y^2 \\ z = 6 - 2x \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} 9 - x^2 - y^2 &= 6 - 2x \\ 3 &= x^2 + y^2 - 2x \end{aligned} \rightarrow x^2 + y^2 = 2x + 3$$

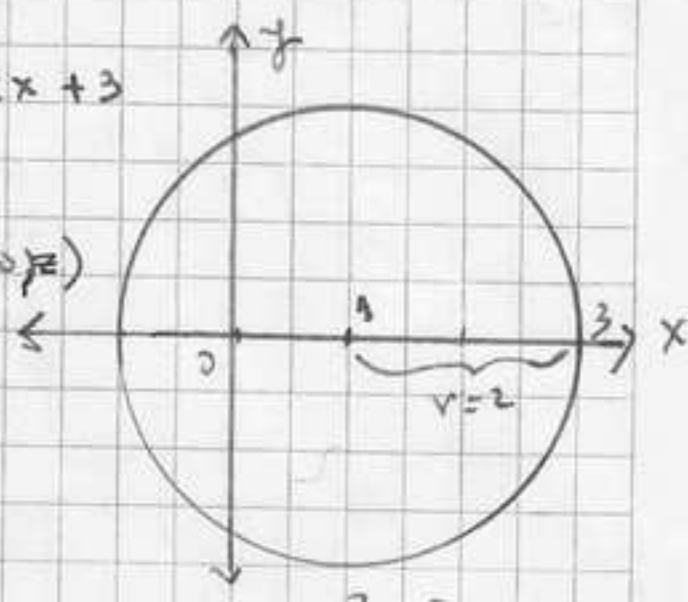
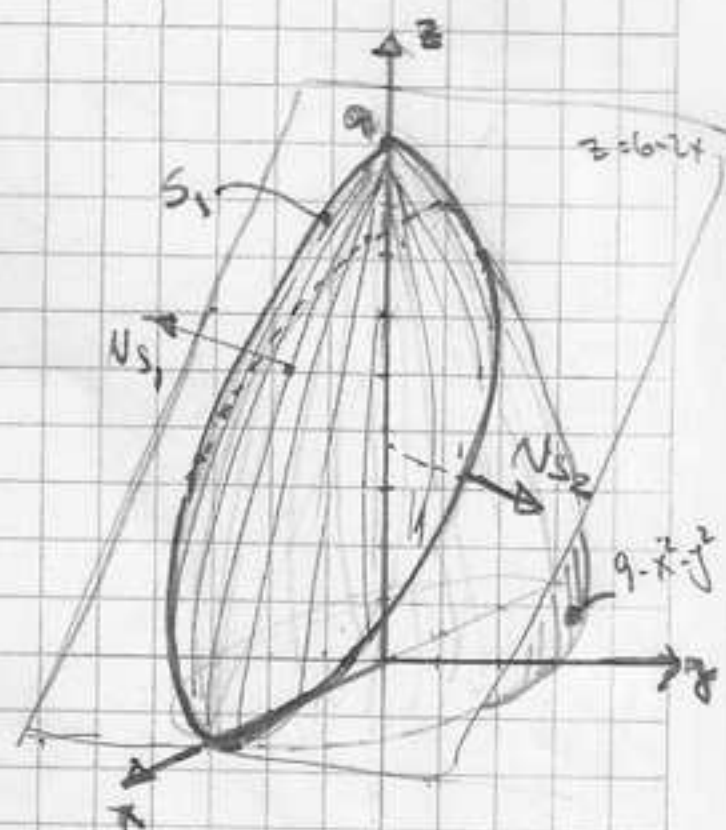
completo ambos cuadrados $\rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4$
 circ. radio 2 centro $(1,0,z)$

Parametrizo el cilindro:

$$\begin{cases} x = 1 + r \cos(t) \\ y = r \sin(t) \\ z = z \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$0 \leq r \leq 2$$



Cort S/

$$6-2x \leq z \leq 9-(x^2+y^2)$$

$$6-2(1+r \cos(t)) \leq z \leq 9-(1+r \cos(t))^2 + r^2 \sin^2(t)$$

$$6-2-2r \cos(t) \leq z \leq 9-(r^2 \cos^2(t) + 2r \cos(t) + 1 + r^2 \sin^2(t))$$

$$\boxed{4-2r \cos(t) \leq z \leq 9-(r^2+2r \cos(t)+1)}$$

Entonces:

$$\iint_S \vec{F} d\vec{s} = \iiint_W \text{div} \cdot \vec{F} d\text{vol} = \iiint_W 2 d\text{vol} \stackrel{\text{T. cambio de variable}}{=} 2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{4-2r \cos(t)}^{9-(r^2+2r \cos(t)+1)} r dz dr dt =$$

Jacobianos

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r \left(\overbrace{9-r^2-2r \cos(t)-1}^{4-r^2} - 4+2r \cos(t) \right) dr dt =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r - r^3) dr dt = 2 \int_0^{2\pi} \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^2 dt = 2 \int_0^{2\pi} (8-4) dt = 8 \cdot 2\pi$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F} d\vec{s} = 16\pi}$$

Para calcular el flujo sobre S_2 parametrizo la superficie:

$$\vec{r}(x,y) = (x,y,6-2x) \rightarrow \vec{r}'_y = (0,1,0)$$

$$\vec{r}'_x = (1,0,-2)$$

$$\rightarrow N_{S_2} = (-2,0,-1) \rightarrow \|N_{S_2}\| = \sqrt{5}$$

está en el sentido
negativo de la dirección q' necesito

$$\iint_{S_2} \vec{F} d\vec{s} = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_{S_2} (y-z, xz, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (-2,0,-1) ds =$$

$$= \iint_{S_2} \frac{-2y + z^2 + 0 - z^2}{\sqrt{5}} ds = \iint_{S_2} -\frac{2y}{\sqrt{5}} ds \Rightarrow \text{para usar cambio de variable uso los límites que ordénate}$$

$$\stackrel{\text{TCV.}}{=} \frac{-2}{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 r \cdot r \sin(t) \cdot \sqrt{5} dr dt = \frac{-2}{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^2 \right) \sin(t) dt = \frac{-2}{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} \sin(t) dt =$$

Jacobianos

$$= -2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} \sin(t) dt = -2 \cdot \frac{8}{3} \left(-\cos(t) \right) \Big|_0^{2\pi} = +2 \cdot \frac{8}{3} \cdot \cos(t) \Big|_0^{2\pi} = \boxed{0 = \iint_{S_2} \vec{F} d\vec{s}}$$

Entonces: $\iint_{S_1} \vec{F} d\vec{s} = \iint_S \vec{F} d\vec{s} - \iint_{S_2} \vec{F} d\vec{s} = 16\pi - 0$

$$\boxed{\iint_{S_1} \vec{F} d\vec{s} = 16\pi}$$