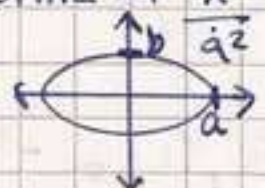
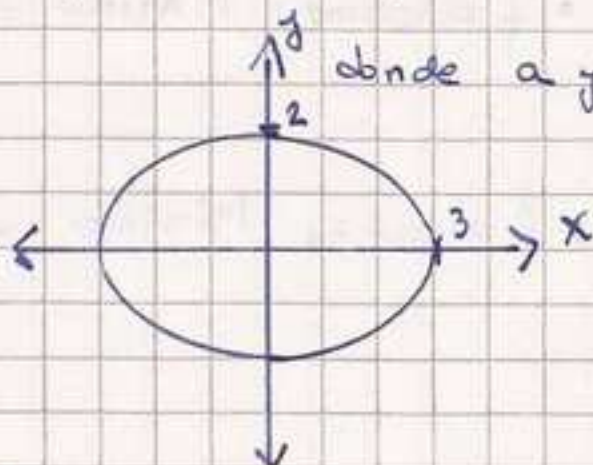


① Sea f el campo escalar definido en $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = xy$, hallar sus extremos absolutos sobre la curva de ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Primero voy a analizar la restricción:

C: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ es una elipse (las elipses tienen la forma de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ donde a y b son: 

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \rightarrow a=3, b=2$$



La parametrizo con coord. polares:

$$C: \gamma(t) = (3 \cos(t), 2 \sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Como la restricción es un conjunto compacto (cerrado y acotado) por el teorema de Weierstrass se que existen, al menos, 2 extremos absolutos (uno máx. y uno mín.)

Entonces evalúo la función en $\gamma(t)$ y busco los puntos críticos, especializo la función en todos los P.C. y analizo máx. y mínimos absolutos.

Sea $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / h(t) = f(\gamma(t)) \rightarrow$ busco P.C. de h :

$$h(t) = \overbrace{3 \cos(t)}^x \overbrace{2 \sin(t)}^y = 6 \cos(t) \sin(t)$$

P. Críticos:

1º) Extremos del intervalo de la parametrización: 0 y 2π

$$\gamma(0) = (3, 0) = \gamma(2\pi) \rightarrow \boxed{PC_1 = (3, 0)}$$

2º) Derivo h , la igualo a cero y:

$$h'(t) = 6(-\sin(t)\sin(t) + \cos(t)\cos(t)) = 6(\cos^2(t) - \sin^2(t)) = 0 \quad \begin{matrix} 6 \neq 0 \\ \Leftrightarrow \cos^2(t) - \sin^2(t) = 0 \end{matrix}$$

$$\cos^2(t) - \sin^2(t) = 0 \rightarrow \cos^2(t) = \sin^2(t) \xrightarrow{\text{Si } \cos^2(t) \neq 0} \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} = \tan^2(t) = 1$$

$$\bullet \cos^2(t) \neq 0 \rightarrow \tan^2(t) = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{4}; t = \frac{3\pi}{4}; t = \frac{5\pi}{4}; t = \frac{7\pi}{4}$$

$$\therefore \gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{PC_2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)}$$

$$\gamma\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \boxed{PC_4 = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)}$$

$$\gamma\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \boxed{PC_3 = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)}$$

$$\gamma\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \boxed{PC_5 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)}$$

1) continuación

Ahora sólo falta evaluar la función en todos los PC y analizar los valores y
los comparamos:

$$PC_1: f(3,0) = 0$$

$$PC_2: f\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) = 3$$

$$PC_3: f\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) = -3$$

$$PC_4: f\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right) = 3$$

$$PC_5: f\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right) = -3$$

• f alcanza Máximo absoluto en $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ y $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

• f alcanza Mínimo absoluto en $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ y $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

② Un sólido ocupa la región

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 4, y \leq z \leq 3y\}$$

Calcular la coordenada y del centro de masa del sólido sabiendo que su densidad volumétrica es constante y que su volumen es igual a $16/3$.

— Cálculo de la masa:

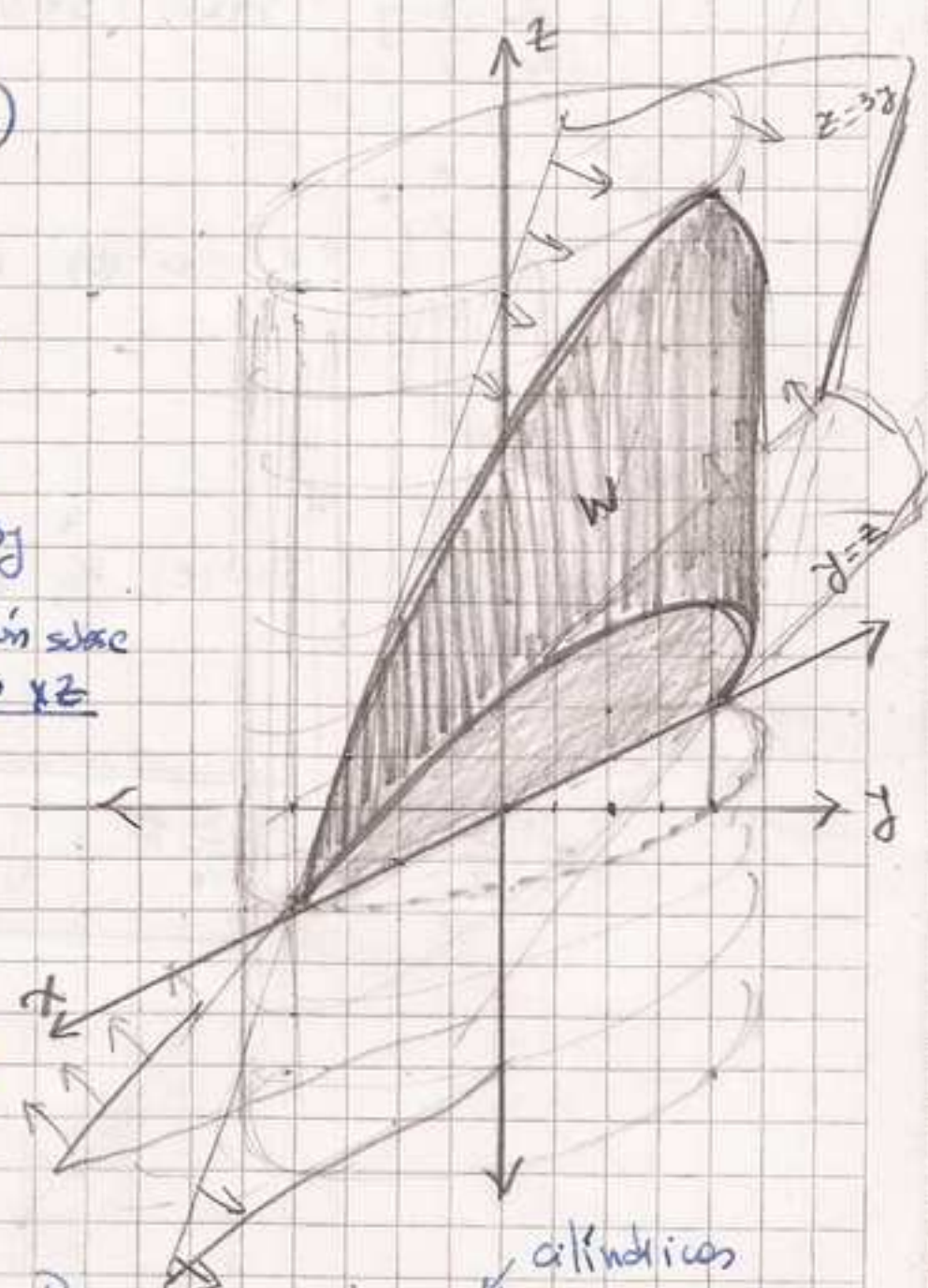
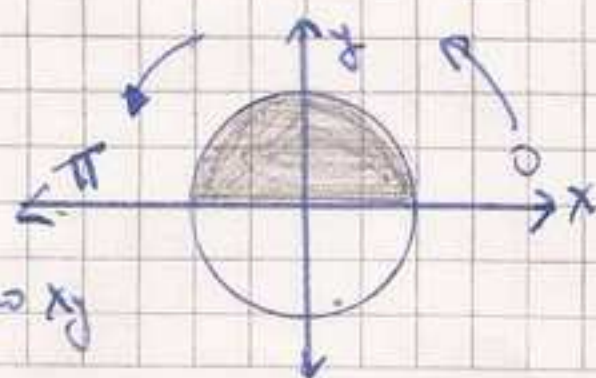
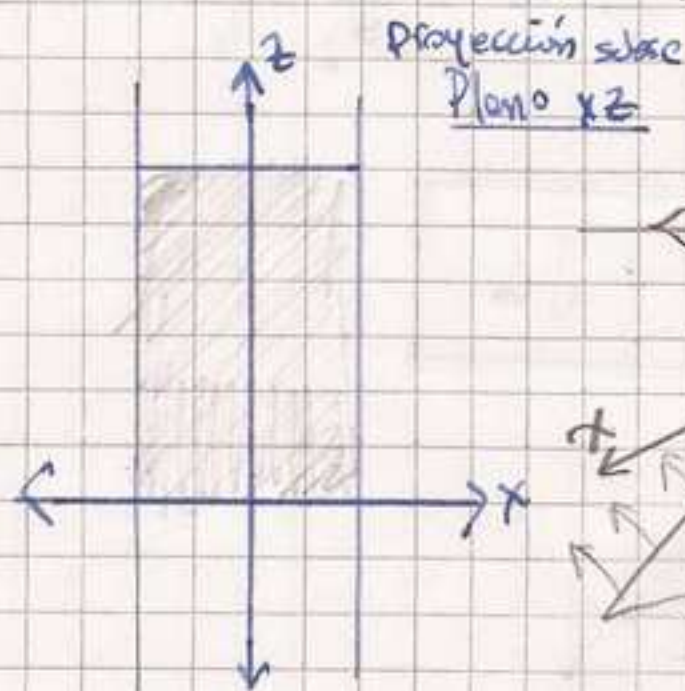
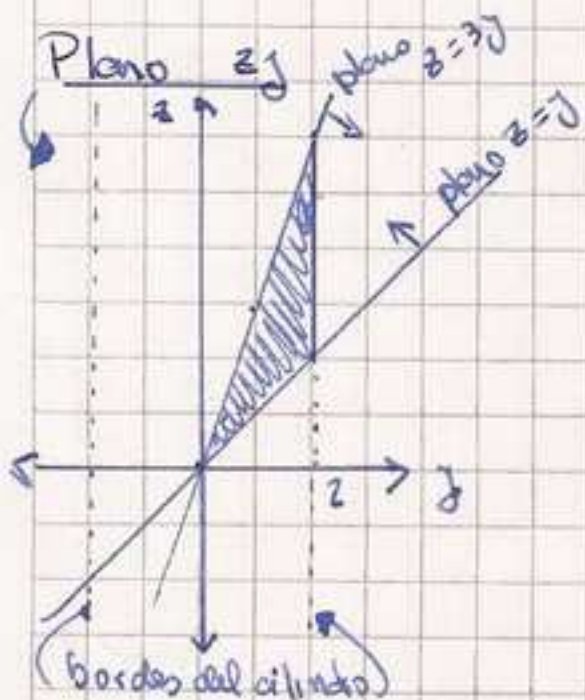
$$\text{Masa} = \iiint_W \rho(x, y, z) \, d\text{vol} = \iiint_W \rho(x, y, z) \, d\text{vol} = \rho \iiint_W d\text{vol} = \rho \cdot \frac{16}{3} = \text{Masa}$$

Centro de masa (coord. y):

$$y_G = \frac{\int y \, d\text{vol}}{\text{Masa}} = \frac{1}{16\rho} \iiint_W y \, d\text{vol} = \frac{1}{16\rho} \iiint_W y \cdot \rho \, d\text{vol} = \frac{1}{16} \iiint_W y \, d\text{vol}$$

Ahora analizo la forma de W

- $x^2 + y^2 \leq 4 \rightarrow$ cilindro (bordes y interior) con eje en el eje z y radio 2
- $y \leq z$ todo lo que está en el cilindro, por encima del plano $y = z$
- $z \leq 3y$ todo lo que está en el cilindro que está por debajo del plano $z = 3y$



Para parametrizar cilindros veo que t se mueve entre 0 y π , z , entre los planos $z=y$ y $z=3y$ y el radio entre 0 y 2 .

Parametrización en cilíndricos: $\sigma(r, t) = (r \cos(t), r \sin(t), z)$

$$0 \leq r \leq 2$$

$$0 \leq t \leq \pi$$

$$r \sin(t) = y \leq z \leq 3y = 3r \sin(t)$$

$$\text{jacobiano} = r$$

Continuando con el ejercicio, hago un cambio de variable (x teorema):

$$\iiint_G = \frac{3}{16} \iiint_W y \underbrace{\frac{dV}{dx dy dz}}_{\text{t.c.v.}} \stackrel{\text{t.c.v.}}{=} \frac{3}{16} \int_0^\pi \int_0^2 \int_{r \sin(t)}^{3r \sin(t)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial r \sin(t)}}_{\text{jacob.}} \cdot r \, dz \, dr \, dt =$$

$$= \frac{3}{16} \int_0^\pi \int_0^2 \int_{r \sin(t)}^{3r \sin(t)} r^2 \sin(t) \, dz \, dr \, dt =$$

$$= \frac{3}{16} \int_0^\pi \int_0^2 r^2 \sin(t) \left(\overbrace{3r \sin(t) - r \sin(t)}^{2r \sin(t)} \right) dr \, dt =$$

$$= \frac{3}{16} \int_0^\pi \int_0^2 2r^3 \sin^2(t) \, dr \, dt = \frac{3}{16} \cdot 2 \int_0^\pi \sin^2(t) \cdot \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^2 dt =$$

$$= \frac{3 \cdot 2}{16 \cdot 4} \int_0^\pi \sin^2(t) \cdot \frac{16}{1} dt = \frac{3}{8} \cdot 4 \int_0^\pi \sin^2(t) dt =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{3}{4} \pi = \iiint_G}$$

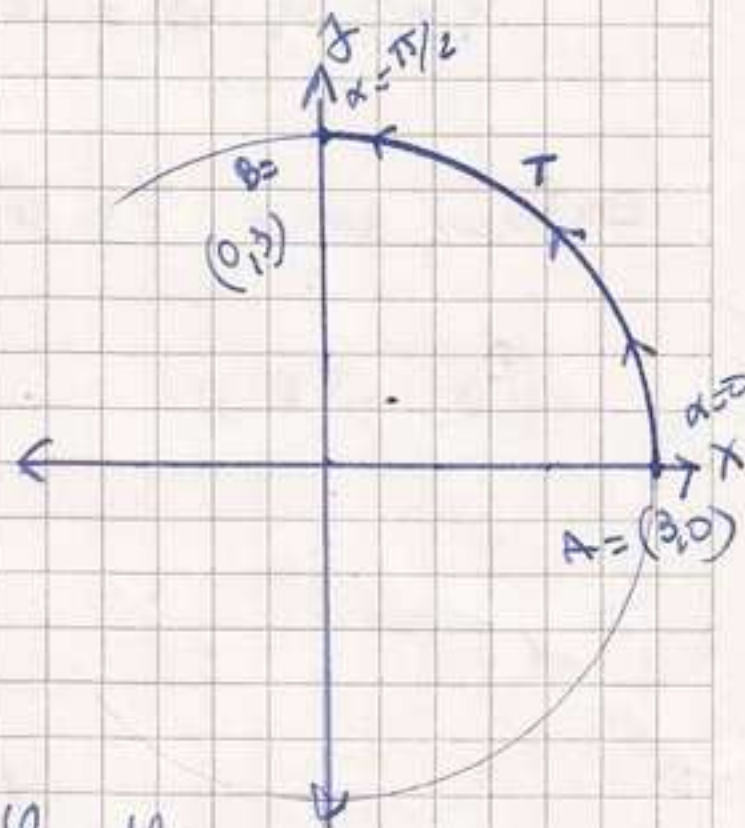
③ Sean el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (4x - 3y^2, y^2 - 6xy)$ y la curva simple T de ecuación paramétrica $\vec{r}(t) = (3\cos^3(t), 3\sin^3(t))$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ orientada según la parametrización dada. Hallar la circulación de $\vec{F}$ sobre T

Primer análisis cómo es t:

$$\tilde{\gamma}(t) = (3 \cos^3(t), 3 \sin^3(t)) \quad t \in [0, \pi/2]$$

Punto inicial: $A = \vec{\gamma}(0) = (3, 0)$

Punto focal: $B = \bar{g}(\pi/2) = (0, 3)$



Share analysis $\bar{F}$:

Si $\vec{F}$ es conservativo entonces $\int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \varphi_B - \varphi_A$
 $\exists \varphi / \vec{F} = \nabla \varphi$ (t vale de A a B)

Quiero ver si $\vec{F}$ es conservativo:

- $\text{Dom}(\bar{F}) = \mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo ✓
- Sea $\bar{F} = (P, Q)$, si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \rightarrow \bar{F}$ es simétrica

$$P(x,y) = 4x - 3y^2 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 4$$

$$Q(x,y) = y^2 - 6xy \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -6y$$

Como se cumplen estas condiciones, $\vec{F}$ es conservativo $\rightarrow \vec{F}(x,y) = \nabla \varphi(x,y)$

2. Busco la función $q(x,y)$:

$$\vec{F}(x,y) = \nabla \varphi(x,y) = (4x - 3y^2, y^2 - 6xy) \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 4x - 3y^2 \quad \wedge \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = y^2 - 6xy$$

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial x} = 4x - 3y^2 \xrightarrow{\text{integrate w.r.t. } x} \phi = \frac{4x^2}{2} - 3y^2x + \alpha(y) \rightarrow \phi(x,y) = 2x^2 - 3y^2x + \alpha(y)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= y^2 - 6xy \quad (1) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -6xy + \alpha'(x) = y^2 - 6xy \rightarrow \alpha'(x) = y^2 \end{aligned} \right.$$

$$d(y) = \frac{1}{2} \frac{d}{dy} + C$$

$$\therefore \boxed{Q(x,y) = 2x^2 - 3xy^2 + \frac{y^3}{3} + C}$$

③ const.)

Ahora que tengo $\varphi(x,y)$, la evalúo en los puntos A y B

$$\varphi(A) = \varphi(3,0) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 \cdot 0^2 + \frac{0^3}{3} + C = 18 + C = \varphi(A)$$

$$\varphi(B) = \varphi(0,3) = 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 \cdot 3^2 + \frac{3^3}{3} + C = 9 + C = \varphi(B)$$

Entonces, como $\vec{F}$ es conservativo:

$$(\vec{F}(x,y) = \nabla \varphi(x,y))$$

$$\int_T \vec{F} d\vec{e} = \varphi_B - \varphi_A = 9 + C - 18 - C = -9$$

$$\boxed{\int_T \vec{F} d\vec{e} = -9}$$

4-7-13

④ Calcular $\iint_D (2x-y)^2 \sin^2(2x+y) dx dy$, D descrito por $-\pi \leq y-2x \leq \pi$ ①
 $\pi \leq 2x+y \leq 3\pi$ ②

Es conveniente hacer un cambio de variables. Para eso, utilizo el teorema de C. de variables.

Sea $\begin{cases} u = 2x-y \\ v = 2x+y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{① } -\pi \leq y-2x \leq \pi \equiv \pi \geq \underbrace{2x-y}_{u} \geq -\pi \\ \text{② } \pi \leq \underbrace{2x+y}_{v} \leq 3\pi \end{cases}$

con: $\pi \geq u \geq -\pi$

$3\pi \geq v \geq \pi$

Jacobiano: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{4} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

Calculo la integral:

$I = \iint_D (2x-y)^2 \sin^2(2x+y) dx dy \stackrel{\text{T.C.V}}{=} \int_{\pi}^{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^2 \sin^2(v) \cdot \frac{1}{4} du dv \stackrel{\text{Jacobiano}}{=} =$

$= \frac{1}{4} \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2(v) \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} dv = \frac{1}{4 \cdot 3} \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2(v) \cdot \overbrace{\pi^3 - (-\pi)^3}^{2\pi^3} dv =$

$= \frac{1}{12} \cdot 2\pi^3 \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2(v) dv = \frac{\pi^3}{6} \left(\frac{v}{2} - \frac{\sin(2v)}{4} \right) \Big|_{\pi}^{3\pi} = \frac{\pi^3}{6} \cdot \pi = \frac{\pi^4}{6}$

$I = \frac{\pi^4}{6}$

4-7-13

⑤ Sea Σ la porción del cilindro de ecuación paramétrica:

$$\bar{X}(u, r) = (2 \cos(u), r, 2 \sin(u)) \quad \begin{matrix} 0 \leq u \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq u \end{matrix}$$

Siendo el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, z), Q(x, y), R(x, z))$, $\vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

a) Graficar la Superficie

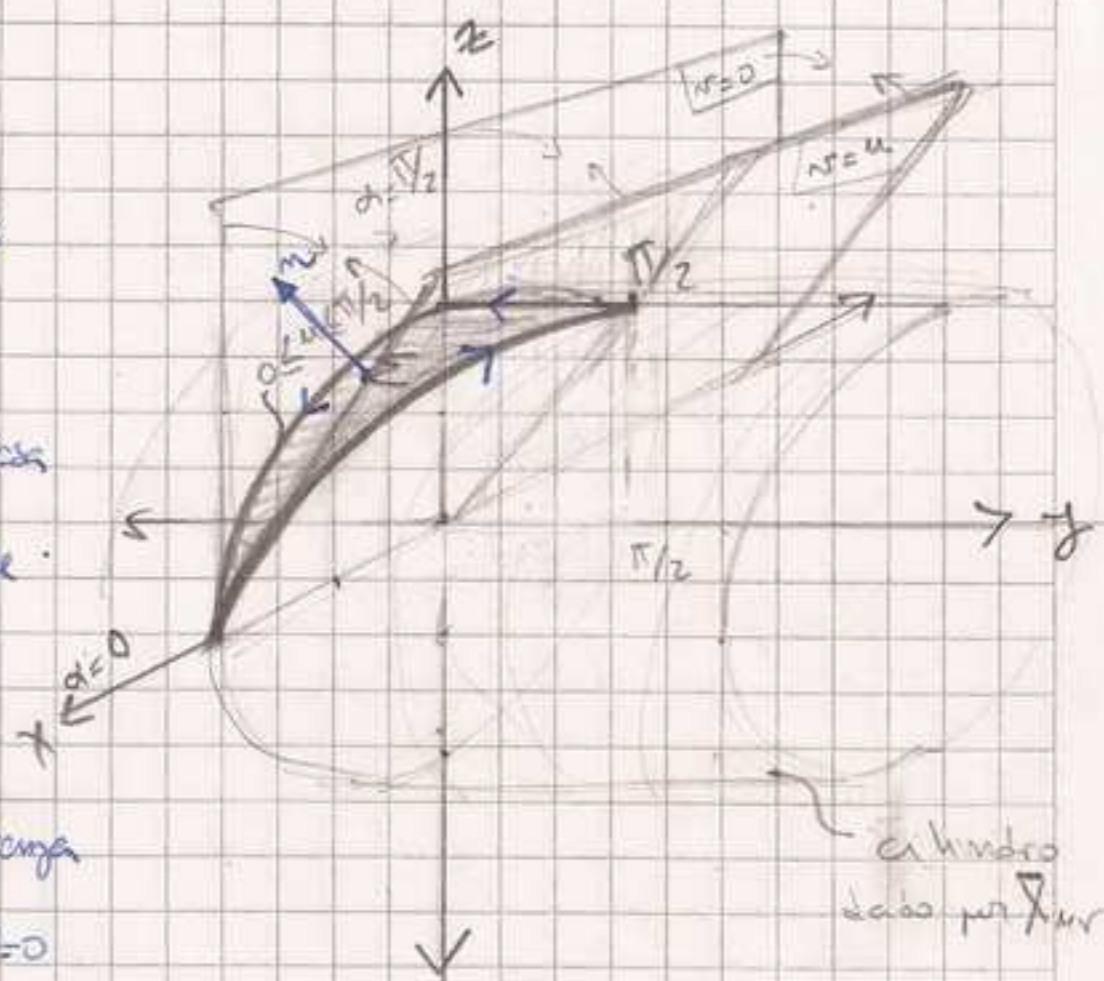
Análisis la Superficie:

• $\bar{X}(u, r) = (2 \cos(u), r, 2 \sin(u))$

es un cilindro radio 2 con eje en el eje y (lítre)

- $0 \leq u \leq \pi/2$ indica que nos interesa la parte del cilindro que va de 0 a $\pi/2$ (sobre el plano xz)

- $0 \leq r \leq u \rightarrow$ a medida que u avanza también avanza r , y en $u=0 \rightarrow r=0$
 $u = \pi/2 \rightarrow r = \pi/2 \rightarrow$ un plano



b) Hallar la circulación de $\vec{F}$ sobre la curva borde de Σ indicando en el gráfico la orientación elegida.

Para calcular la circulación analizo si se cumplen las hipótesis requeridas para utilizar el teorema de Stokes o del Rotor:

- Σ es una Superficie suave orientable ✓
- Sea $C = \partial \Sigma \rightarrow$ C es una curva suave, regular y orientada positivamente ^{trazos} ✓
 ~~Σ (cerrada)~~
- $\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \rightarrow \vec{F} \in C^1(\Sigma)$ ✓

Como se cumplen las hipótesis:

$$\oint_{C^+} \vec{F} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{F} d\vec{s}$$

5) cont.

Calculo el rotor:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,z) & Q(x)-2x & R(x,z) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\overbrace{\frac{\partial R(x,z)}{\partial y}}^0 - \overbrace{\frac{\partial (Q(x)-2x)}{\partial z}}^0, \frac{\partial R(x,z)}{\partial z} - \frac{\partial R(x,z)}{\partial x}, \overbrace{\frac{\partial (Q(x)-2x)}{\partial x}}^{-2} - \overbrace{\frac{\partial P(x,z)}{\partial y}}^0 \right) =$$

$$= \left(0, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, -2 \right) = \text{rot } \vec{F}$$

Ahora calculo la normal:

$$\vec{X}'_u = (-2 \sin(u), 0, 2 \cos(u))$$

$$\vec{X}'_v = (0, 1, 0)$$

$$\rightarrow N = \vec{X}'_v \times \vec{X}'_u = (2 \cos(u), 0, 2 \sin(u))$$

es el vector posición ~~de~~ $\rightarrow$ origen
toda hacia donde está dirigido

Entonces:

$$\oint_{\partial \Sigma} \vec{F} d\vec{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{F} d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \left(0, \frac{\partial P(x,y)}{\partial z} - \frac{\partial R(x,y)}{\partial x}, -2 \right) \cdot (2 \cos(u), 0, 2 \sin(u)) d\vec{s} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^u -4 \sin(u) du dv = -4 \int_0^{\pi/2} \sin(u) (u-0) du = -4 \int_0^{\pi/2} u \sin(u) du =$$

$$= -4 \cdot 1 = -4 \rightarrow$$

$$\boxed{\oint_{\partial \Sigma} \vec{F} d\vec{l} = -4}$$