Apunte de Integrales

1. Integrales de Línea

1.1. Longitud de Arco

La fórmula que permite calcular la longitud del camino recorrido por una partícula que se mueve sobre una curva $\mathcal{C}$ entre dos puntos a y b de la misma es:

$$l = \int_a^b \left\| \vec{g}'(t) \right\| dt \tag{1}$$

donde $\vec{g}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ es una parametrización regular de la curva.

1.2. Circulación de $\vec{F}$ a través de $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}$: $\vec{g}(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]$, con g: $[a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n / a \leq t \leq b$ (describe un arco de curva regular).
$\vec{F}(\vec{x}) = [F_1(\vec{x}), \ldots, F_n(\vec{x})]$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{C}$.

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{g}(t)\, dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t)\, dt \tag{2}$$

1.3. Independencia del camino de una Integral de Línea

Cuando $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{g}$ no depende de la trayectoria de $\mathcal{C}$ se la denomina *independiente del camino*, esto sucede cuando el campo vectorial es un campo de gradiente.
Si $U(x, y, z) = U(\vec{x})$ un campo escalar con $\vec{\nabla} U(\vec{x})$ continuo y $\vec{A}$ y $\vec{B} \in \mathbf{D}$.
Si $\mathcal{C}$: $\vec{g}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, $a \leq x \leq b /\ \vec{g}(a) = \vec{A}$ y $\vec{g}(b) = \vec{B}$. Entonces:

$$\int_{\mathcal{C} \equiv AB} \vec{\nabla} U(\vec{x}) \cdot d\vec{g}(t) = U\left(\vec{B}\right) - U\left(\vec{A}\right) \tag{3}$$

2. Cambio de Coordenadas para integrales dobles

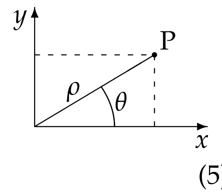
$\vec{h}(u, v) = [x(u, v), y(u, v)]$ una función vectorial biyectiva, con $(u, v) \in \mathbf{D}$ y $(x, y) \in \mathbf{B}$
Si $x(u, v), y(u, v), x'_u(u, v), x'_v(u, v), y'_u(u, v), y'_v(u, v)$ son continuas en $\mathbf{D}$;
si $\vec{F}$: $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, \vec{F}[x(u, v), y(u, v)]$ es acotada e integrable en $\mathbf{D}$ tal que $\mathcal{J}(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$, entonces

$$\iint_{\mathbf{B}} \vec{F}(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\mathbf{D}} \vec{F}[x(u, v), y(u, v)]\, |\mathcal{J}(u, v)|\, du\, dv \tag{4}$$

2.1. En coordenadas polares

$\vec{h}(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)$ pues $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

$\mathcal{J}(\rho, \theta) = \rho$



$$\iint_{\mathbf{R}_{xy}} \vec{F}(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\mathbf{D}_{\rho\theta}} \vec{F}[\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta]\, \rho\, d\rho\, d\theta \tag{5}$$

3. Función Potencial

Si $\vec{F}(\vec{x})$ es el gradiente de un campo escalar $U(\vec{x}) \Longrightarrow$ se dice que $U(\vec{x})$ es la *función potencial de* $\vec{F}$ o *el potencial de* $\vec{F}$.

Sea $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}[x_1, \ldots, x_n] = [P_1(\vec{x}), \ldots, P_n(\vec{x})]$ un campo vectorial derivable con continuidad en un conjunto simplemente conexo $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^n$.

La condición necesaria para que:

1. $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{g}(t) = 0$ sobre toda curva cerrada $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{D}$
2. $\int_{\mathcal{C} \equiv AB} \vec{\nabla} U(\vec{x}) \cdot d\vec{g}(t) = U\left(\vec{B}\right) - U\left(\vec{A}\right)$
3. $\exists\, U(\vec{x})$ diferenciable$/\, \vec{\nabla} U(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) \;\; \forall\, \vec{x} \in \mathbf{D}$, o sea $\dfrac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_k} = P_k(\vec{x}) \;\; \forall\, \vec{x} \in \mathbf{D}$

Con $k = 1, \ldots, n$

Es que:

$$\frac{\partial P_j(\vec{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial P_i(\vec{x})}{\partial x_i} \qquad \forall\, i, j = 1, \ldots, n,\; i \neq j \text{ y } \vec{x} \in \mathbf{D} \tag{6}$$

4. Rotor

Si $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(x, y, z) = [P_1(\vec{x}), P_2(\vec{x}), P_3(\vec{x})]$ es un campo vectorial derivable con continuidad en un conjunto simplemente conexo $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^n$ que admite $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{\nabla} U(\vec{x})$.

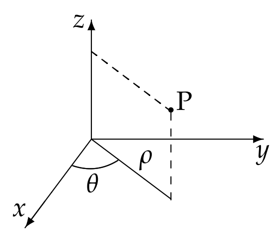
$$\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ P_1(\vec{x}) & P_2(\vec{x}) & P_3(\vec{x}) \end{vmatrix} \tag{7}$$

Si el $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{F}(\vec{x})$ es *irrotacional* o $\vec{F}$ es un campo vectorial *conservativo*.

5. Coordenadas Cilíndricas

Directas

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\operatorname{sen}\theta \;, \qquad |\mathcal{J}| = \rho \\ z &= z \end{cases}$$



Inversas

$$\begin{cases} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad \theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ z &= z \end{cases}$$

5.1. Coordenadas Cilíndricas para integrales triples

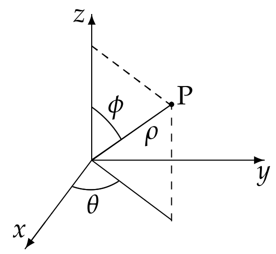
$$\iiint_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\mathcal{C}^*} f\left[\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z\right] |\mathcal{J}|\, d\rho\, d\theta\, dz \tag{8}$$

con $\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in \mathbf{R}$ (campo de variación de las coordenadas cilíndricas).

Donde $\mathcal{C}^*$ es el sólido incluido en el espacio tridimensional $\rho\theta z$ en el que se transforma el sólido $\mathcal{C}$ incluido en el espacio cartesiano xyz.

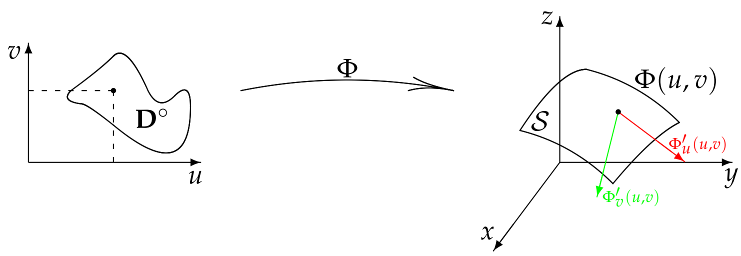
6. Coordenadas Esféricas

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi \\
y &= \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\
z &= \rho \cos\phi \\
|\mathcal{J}| &= \rho^2 \operatorname{sen}\phi
\end{aligned}
$$



Observación: Conviene utilizar coordenadas cilíndricas cuando el cuerpo presenta un eje de simetría (conos, cilindros, etcétera) y esféricas cuando el cuerpo presenta un centro de simetría (esfera, porciones cónicas de esferas, etcétera).

7. Integrales de Superficie



$\Phi(u,v) = [X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)]$ de clase C^1, inyectiva en $\mathbf{D}^\circ$ y regular en $\mathbf{D}^\circ$, es decir:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,v) \neq \vec{0}\ \forall\ (u,v) \in \mathbf{D}^\circ$$

$$\acute{A}rea(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \overset{\overset{DEF}{\downarrow}}{=} \iint_{\mathbf{D}} \left\|\Phi'_u(u,v) \wedge \Phi'_v(u,v)\right\| du\, dv \tag{9}$$

8. Flujo

Si $\Phi(u,v)$ es la parametrización de la superficie $\mathcal{S}$ en donde queremos calcular el flujo de $\vec{F}(x,y,z)$ (campo vectorial), siendo $\Phi(u,v) = [X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)]$, el *flujo de* $\vec{F}(x,y,z)$ *a través de la superficie* $\mathcal{S}$ es:

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \check{n}\, d\mathcal{S} = \iint_{\mathbf{D}} \vec{F}\left[\Phi(u,v)\right] \cdot \left(\Phi'_u \wedge \Phi'_v\right) du\, dv \tag{10}$$

9. Teorema de Stokes

Dada una $\vec{g}(t)$ que parametriza a una curva $\mathcal{C}$ (cerrada), dada una superficie orientable $\mathcal{S}$ que admite un plano tangente en cada punto, y dado un campo vectorial $\vec{F}$: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ de clase C^1. Si la función (cuya gráfica es $\mathcal{S}$) es de clase C^2 con $\mathcal{C}$ como frontera de $\mathcal{S}$ entonces:

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \check{n}\, d\mathcal{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\, d\vec{g}(t) \qquad \text{donde } d\vec{g}(t) = g'(t)\, dt \tag{11}$$

Si $\Phi(u,v)$ parametriza a $\mathcal{S} \Longrightarrow \check{n} = \Phi'_u \wedge \Phi'_v$ (el sentido de $\check{n}$ depende de la orientación de $\mathcal{C}$ y se obtiene con la *regla de la mano derecha* o *del tirabuzón*).

10. Teorema de la Divergencia

Sea $\vec{F}: \mathcal{S} \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 / \vec{F}(x,y,z) = [P_1(x,y,z), P_2(x,y,z), P_3(x,y,z)]$ de clase C^1, con P_1, P_2 y P_3 admitiendo derivadas parciales continuas en $\mathcal{S}$. Sea $\mathbf{V}$ el sólido limitado por la superficie $\mathcal{S}$ y apunte la normal $\check{n}$ de $\mathcal{S}$ hacia el exterior de $\mathbf{V}$. Entonces:

$$\iiint_{\mathbf{V}} \mathrm{div}\vec{F}(x,y,z)\, d\mathbf{V} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \check{n}\, d\mathcal{S} \tag{12}$$

donde $\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P_1, P_2, P_3) = P'_{1x} + P'_{2y} + P'_{3z}$

11. Teorema de Green

Sea un dominio $\mathbf{D}$ triangulable en $\mathbf{R}^2$ y sea $\vec{F}(x,y) = [P(x,y), Q(x,y)]$ de clase C^1 en un abierto que contiene a $\mathbf{D} \cup \partial\mathbf{D}$ (siendo $\partial\mathbf{D}$ la frontera de $\mathbf{D}$). Entonces:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{g}(t) = \oint_C P\, dx + Q\, dy = \iint_{\mathbf{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy \tag{13}$$

11.1. Relación con el Teorema de Stokes

$\vec{H}(x,y,z) = [P(x,y), Q(x,y), 0]\,, \check{n} = [0,0,1]$

$\mathrm{rot}\vec{H} \cdot \check{n} = Q'_x - P'_y$

11.2. Relación con el Teorema de la Divergencia

$\vec{G}(x,y) = [-Q(x,y), P(x,y)] = [A(x,y), B(x,y)]$

$\oint_{\partial\mathbf{D}} [-Q(x,y) + P(x,y)] = \iint_{\mathbf{D}} \left(P'_x + Q'_y\right) dx\, dy$