Indicar claramente apellido y número de padrón en cada hoja que entregue. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS BIEN RESUELTOS

Apellido: .... Nombres : ....

Padrón: ....

1. Sea el campo escalar $f(x,y,z) = 3y^2$. Calcular el flujo del ∇f a través de la superficie frontera del sólido $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4;\ z \geq 0;\ x + z \leq 8\}$. Indicar en un gráfico el sentido de orientación utilizada para la normal a la superficie.

2. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / \vec{F}(x,y,z) = (yz + kxy, xz + 3x^2, xy)$

   a) Hallar k de forma que $\vec{F}$ sea irrotacional.

   b) Mostrar que la circulación de $\vec{F}$ desde el punto $(-3, 2, 0)$ hasta cualquier punto de la curva $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z + 3x = 54\,,\ xy = \frac{8}{9}\,,\ x > 0\}$ es igual a -6, para el valor de k hallado en el ítem a).

3. Calcular $\displaystyle\iint_\Sigma \frac{2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}\, dS,$

   siendo Σ la porción de superficie $z = x^2 + y^2$ con $z \leq 2; y \geq x;\ x \geq 0.$

4. Sea el campo $\vec{F}(x,y) = (3x^2 - ln(x^2 + y^2), y^5 + ln(x^2 + y^2))$. Hallar la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la frontera de la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 10;\ x^2 + y^2 \geq 4;\ x \geq 0;\ y \geq 0\}$, indicando en un gráfico el sentido de orientación utilizado.

5. Sea C la curva solución del problema de valores iniciales $y' = \dfrac{2x - y}{x}$, $y(1) = 1$.

   a) Hallar la curva C.

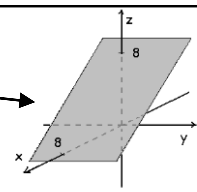
   b) Encontrar el mínimo absoluto de $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2$ restringida a C.

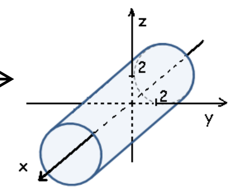
AMII – INTEGRADOR del 28-2-14 (resuelto)

1. Sea el campo escalar f(x,y,z) = $3y^2$. Calcular el flujo del ∇f a través de la superficie frontera del sólido W= {(x,y,z) ε R^3 : z^2+ y^2 ≤ 4 ; x ≥ 0 ; x + z ≤ 9}. Indicar en un gráfico el sentido de orientación utilizada para la normal a la superficie.

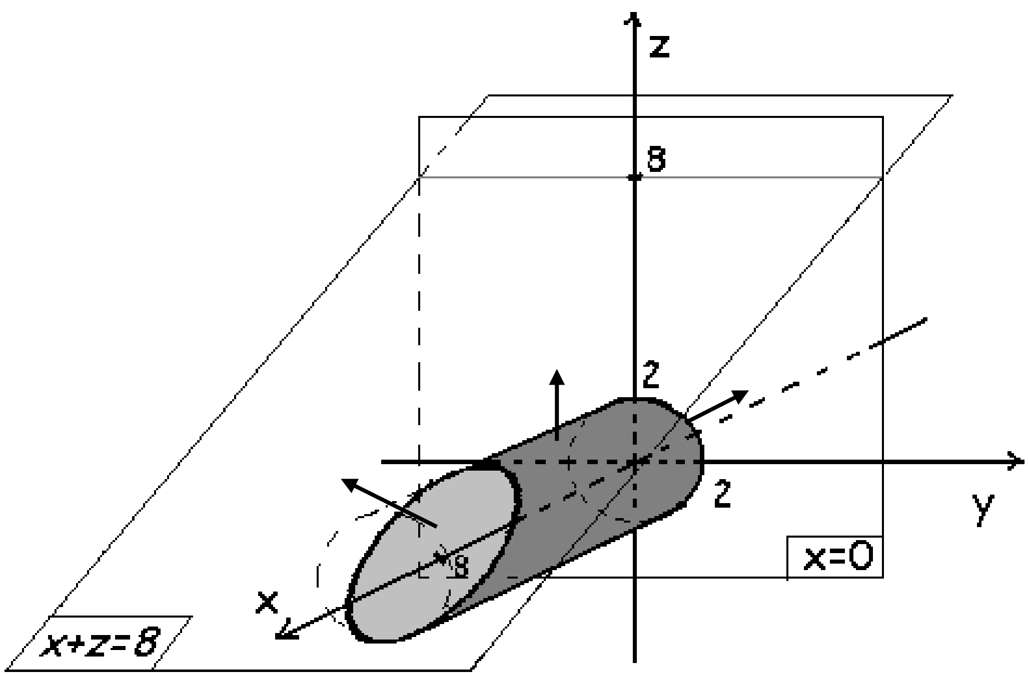
Analizo la forma de W (la intersección de las superficies que lo envuelven):

$$\begin{cases} z^2+y^2=4 \ \rightarrow \ \text{cilindro, radio } 2 \ con\ eje = eje\ 'x' \\ x=0 \quad \rightarrow plano\ yz \\ x+z=3 \ \rightarrow plano\ x=3-z \quad (y\ libre) \end{cases}$$





Dibujo la intersección de esas superficies:



Por los datos del enunciado conocemos los límtes de **x**: 0 ≤ x ≤ 8 - z

Sea $\vec{F}_{(x,y,z)} = \nabla f_{(x,y,z)} = (0,6y,0)$

Como piden calcular el flujo en un campo R^3, voy a analizar si se cumplen las hipótesis necesarias para utilizar el Teorema de Gauss:
Sea **S** la superficie frontera de **W**

- ✓ W es una región compacta de $\Re^3$ cuya frontera S está orientada hacia el exterior (ver normal dibujada en el gráfico)
- ✓ $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right),\ donde\ \ P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}\ y\, R_{(x,y,z)} \in C^{\infty}(\Re^3)\ pues\, son\, polinomios$

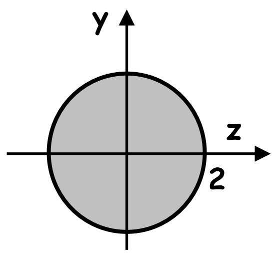
$$\therefore \vec{F} \in C^{\infty}(\Re^3) \ \rightarrow \ \vec{F} \in C^{1}(\Re^3)$$

Se cumplen las hipótesis, por lo tanto:

$$\iint_S \vec{F}.d\bar{s} = \iiint_W div.\vec{F}.dvol = \iiint_W (0+6+0).dvol = 6\iiint_W dx.dy.dz =$$

Por la forma que tiene W conviene hacer un cambio de variables a cilíndricas:

Proyección de W
sobre el plano yz



$$\vec{\sigma}_{(x,r,t)} = \left(x, r.sen(t), r.\cos(t)\right)$$

$$0 \le r \le 2 \ , \ 0 \le t \le 2\pi$$
$$0 \le x \le 8 - z \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le 8 - r.\cos(t)$$
$$Jacobiano = r$$

Entonces:

$$\overset{\substack{cambio \\ variable}}{=} 6\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{8-r.\cos(t)} \overset{jac.}{r}\ .dx.dr.dt = 6\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r(8-r.\cos(t).dx.dr.dt = 6\int_0^{2\pi}\int_0^{2} 8r - r^2.\cos(t).dr.dt =$$

$$= 6\int_0^{2\pi} 4r^2 - \frac{r^3}{3}.\cos(t)\Big|_{r=0}^{r=2} .dt = 6\int_0^{2\pi} 8\left(2 - \frac{1}{3}.\cos(t)\right).dt = 48\int_0^{2\pi} 2 - \frac{1}{3}.\cos(t).dt = 192\pi$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F}.d\bar{s} = 192\pi}$$

2. Sea $\vec{F}:\Re^3 \to \Re^3 / \vec{F}_{(x,y,z)} = \left(yz + k.xy\,,\, xz + 3x^2\,,\, xy\right)$

a) Hallar *k* de forma que F sea irotacional.

$\vec{F}\ es\ \ irrotacional \Rightarrow rot.\vec{F} = \bar{0} = (0,0,0)$

$rot.\vec{F} = (x - x, y - y, z + 6x - z - kx) = (0,0,0) \Rightarrow 6x - kx = 0 \to 6x = kx \quad \to \quad \boxed{k = 6}$

Además, dom($\vec{F}$) = R^3 → es un conjunto abierto y simplemente conexo √

y $\vec{F}:.\Re^3 \to \Re^3 con\ \ \vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right),\ \ donde\ \ P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}\ y\, R_{(x,y,z)} \in C^{\infty}(\Re^3)$

por ser suma algebraica de polinomios $\therefore \vec{F} \in C^{\infty}(\Re^3) \ \to\ \vec{F} \in C^{1}(\Re^3)$ √

Por lo tanto, $\vec{F}$ es un campo conservativo.

b) Mostrar que la circulación de $\vec{F}$ desde el punto (-3,2,0) hasta cualquier punto de la curva C={(x,y,z) ε R^3 : z + 3x = 54 , xy = 8/9 , x > 0} es igual a -6, para el valor de *k* hallado en el item a).

Tengo que hallar la circulación de **A = (-3,2,0)** a **B**, donde B es cualquier punto de la curva C.

Para hallar B, voy a parametrizar la curva C:

$$C: \begin{cases} z + 3x = 54 \ \to\ z = 54 - 3x \\ xy = \dfrac{8}{9} \xrightarrow{x \neq 0} y = \dfrac{8}{9x} \end{cases} \to C: \bar{\alpha}_{(t)} = \left(t, \frac{8}{9t}, 54 - 3t\right) \ ;\ t \in \Re_{>0}$$

Como $\vec{F}$ es un campo conservativo, entonces $\exists \varphi : \Re^3 \to \Re : \vec{F} = \nabla\varphi$ siendo φ la función potencial de $\vec{F} \therefore \int_C \vec{F}.d\bar{l} = \varphi_{(B)} - \varphi_A$

Busco la función potencial:

$$\vec{F} = (P,Q,R) = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \left(yz + 6.xy\,,\, xz + 3x^2\,,\, xy\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = yz + 6.xy \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = xz + 3x^2 \quad (1) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = xy \quad (2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = yz + 6.xy \xrightarrow{\text{integro } X \text{ m.a.m}} \underbrace{\varphi_{(x,y,z)} = xyz + 3x^2y + \delta_{(y,z)}}$$

$\downarrow$ *derivo con respecto a Y*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = xz + 3x^2 + \frac{\partial\alpha}{\partial y} \underbrace{=}_{(1)} xz + 3x^2 \to \frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0 \to \delta_{(y,z)} = \beta_{(z)}$$

$$\underbrace{\varphi_{(x,y,z)} = xyz + 3x^2y + \beta_{(z)}}$$

$\downarrow$ *derivo con respecto a Z*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = xy + \beta'_{(z)} \underbrace{=}_{(2)} xy \to \beta'_{(z)} = 0 \to \beta_{(z)} = K \quad ; K \in \Re$$

Por lo tanto, la función potencial es:

$$\varphi_{(x,y,z)} = xyz + 3x^2y + K \quad ; \quad (K \in \Re)$$

Entonces, sea *C** la curva que une a A=(-3,2,0) con cualquier punto de la curva *C*:

$$\therefore \int_{C^*} \vec{F}.d\bar{l} = \varphi_{(B)} - \varphi_{(A)} = \varphi_{\left(t,\frac{8}{9t},54-3t\right)} - \varphi_{(-3,2,0)} = \left(t.\frac{8}{9t}.(54-3t)+3.t^2.\frac{8}{9t}\right) - \left(-3.2.0+3.(-3)^2.2\right) =$$

$$= \left(\frac{8}{9}.(54-3t)+t\frac{8}{3}\right) - (54) = 48 - \frac{8}{3}t + \frac{8}{3}t - 54 = -6$$

Por lo tanto, para todas las curvas que unen a A=(-3,2,0) con *C*, que llamé *C**:

$$\boxed{\int_{C^*} \vec{F}.d\bar{l} = -6}$$

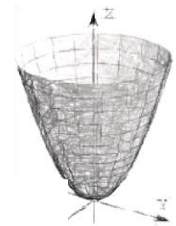
3. **Calcular**

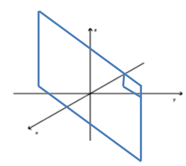
$$\iint_{\Sigma} \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{1+4x^2+4y^2}}}\,\boldsymbol{dS}$$

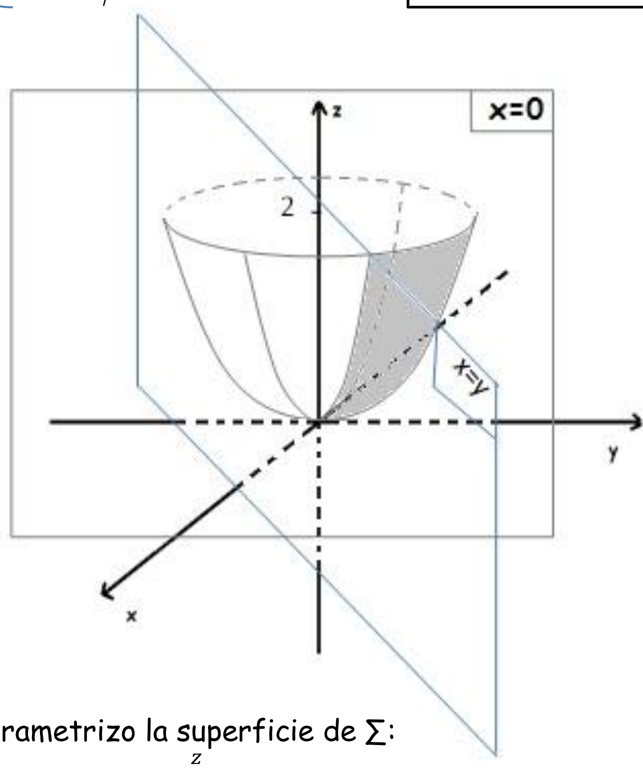
Siendo ∑ la porción de superficie de z = x2 + y2 , con z ≤ 2 ; y ≥ xx ; x ≥ 0.

Analizo la forma de ∑:

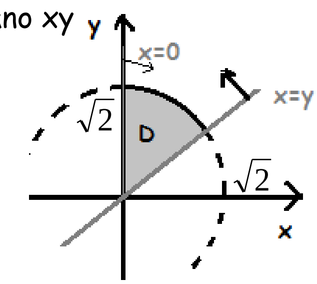
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \;\rightarrow\; paraboloide\ vértice\ en\ (0,0,0) \\ z \le 2 \rightarrow el\ plano\ z = 2\ \lim ita\ el\ crecimiento\ del\ paraboloide \\ \left.\begin{matrix} y \ge x \\ x \ge 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow 0 \le x \le y \end{cases}$$







Proyección de ∑ sobre el plano xy



$$\overbrace{\frac{\pi}{4}}^{x=y} \le t \le \overbrace{\frac{\pi}{2}}^{x=0}$$

$$0 \le x \le \sqrt{2}$$

Parametrizo la superficie de ∑:

$$\bar{\delta}_{(x,y)} = (x, y, \overbrace{x^2+y^2}^{z})$$

$$\bar{\delta}'_x = (1,0,2x)$$

$$\bar{\delta}'_y = (0,1,2y) \qquad \rightarrow N=(2x,2y,-1) \rightarrow \|N\| = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$$

Entonces:

$$\iint_{\Sigma} \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,\mathrm{dS} = \iint_{D} \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,\overbrace{\|\mathrm{N}\|.\,dx.\,dy}^{dS} =$$

$$= \iint_{D} \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.\sqrt{1+4x^2+4y^2}.\,dx.\,dy = 2\iint_{D} dx.\,dy$$

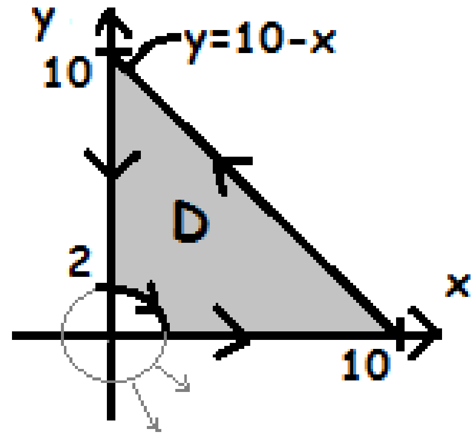
$$\underset{\substack{cambio\\variable}}{=} 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\sqrt{2}} \overbrace{r}^{jac.}\,.\,dr.\,dt = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{0}^{\sqrt{2}} dt = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} = I$$

$$\boxed{\iint_{\Sigma} \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.dS = \frac{\pi}{2}}$$

4. Sea el campo $\vec{F}$ (x,y)= ($3x^2$ – $\ln(x^2+y^2)$, y^3 + $\ln(x^2+y^2)$).
Hallar la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la frontera de la región D={(x,y) ε R^2 : x + y ≤ 10 ; x^2+ y^2 ≥ 4 ; x ≥ 0 ; y ≥ 0} indicando en un gráfico el sentido de orientación utilizado.

Analizo la forma de D (a través de sus bordes):

$$\begin{cases} x+y=10 \rightarrow recta \;\; y=10-x \\ x^2+y^2=2 \;\rightarrow\; circunferencia\ radio\ 2 \\ \qquad centrada\ en\ el\ origen \\ x\geq 0\ ;\ y\geq 0 \rightarrow primer\ cuadrante \end{cases}$$



Como piden calcular la circulación de un campo R^2 → R^2 analizo si se cumplen las hipótesis necesarias para utilizar el Teorema de Green.

- ✓ D es una región compacta cuyo borde es C, una curva cerrada y suave (a trozos)
- ✓ $\vec{F}:\Re^2\rightarrow\Re^2 con\ \vec{F}_{(x,y)}=\left(P_{(x,y)},Q_{(x,y)}\right),\ \ donde\ \ P_{(x,y)}\ y\ Q_{(x,y)}\in C^{\infty}(\Re^2)$

  $pues\ \ son\ \ sumas\ algebraicas\ de un\ funciones\ \ elementales \rightarrow \vec{F}\in C^{\infty}(\Re^2)\rightarrow \vec{F}\in C^{1}(\Re^2)$

Como se cumplen las hipótesis del T. Green puedo decir que:

$$\oint_{c^+}\vec{F}.d\bar{l}=\iint_D\left(Q'_X-P'_Y\right)dx.dy$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{(x,y)}=3x^2-\ln\left(x^2+y^2\right)\rightarrow P'_Y=-\dfrac{2y}{\left(x^2+y^2\right)} \\ Q_{(x,y)}=y^3+\ln\left(x^2+y^2\right)\rightarrow\ Q'_X=\dfrac{2x}{\left(x^2+y^2\right)} \end{array}\right\rangle Q'_X-P'_Y=\frac{2(x+y)}{\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\oint_{c^+}\vec{F}.d\bar{l}=2\iint_D\frac{x+y}{x^2+y^2}dx.dy$$

Por la forma que tiene D conviene trabajar la integral con coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r.\cos(t) \\ y = r.sen(t) \end{cases}$$
con $0 \leq t \leq \pi/2$ Jacobiano= r

Para ver cómo varía *r* veo la forma de D y observo que va desde la circunferencia de radio 2 (o sea, desde r=2) hasta la recta y=10-x.

Y esa recta, en coordenadas polares es : r.sen(t)=10-r.cos(t) → r-sen(t)+r.cos(t)=10 →

➔ r(cos(t)+sen(t))=10 ; como cos(t)+sen(t)=0 ocurre en t= π/2 o en t= 3 π /4… y como esos valores de t NO pertenecen al intervalo a integrar entonces puedo afirmar que cos(t)+sen(t) ≠ 0, por lo tanto : r(cos(t)+sen(t))=10 → r = 10 / (cos(t)+sen(t))

límites de r :
$$2\leq r\leq\frac{10}{(\cos(t)+sen(t))}$$

Entonces:

$$\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = 2\iint_D \frac{x+y.}{x^2+y^2}dx.dy \overset{\overbrace{}^{\substack{cambio\\ variable}}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{\frac{10}{\cos(t)+sen(t)}} \overbrace{r}^{Jac.} \frac{\overbrace{r(\cos(t)+sen(t))}^{x+y}}{\underbrace{r^2}_{x^2+y^2}} dr.dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{\frac{10}{\cos(t)+sen(t)}} (\cos(t)+sen(t))dr.dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t)+sen(t))\left(\frac{10}{(\cos(t)+sen(t))}-2\right)dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t)+sen(t))\left(\frac{10}{(\cos(t)+sen(t))}-2\right)dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (10-2(\cos(t)+sen(t))).dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5-(\cos(t)+sen(t))).dt = \frac{20.\pi}{2} - 8 = 10\pi - 8$$

$$\boxed{\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = 10\pi - 8}$$

5. **Sea C la curva solución del problema de valores iniciales** $y'=\dfrac{2x-y}{x};\ y_{(1)}=1$

a) **Hallar la curva C**

Analizo la forma de D (a través de sus bordes):

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x}\ \rightarrow\ x.dy=/\,2x-1).dx$$

Si la trabajo como la ecuación (2x-y) dx + (-x).dy = 0 y la considero como $P_{(x,y)}+Q_{(x,y)}=0$, se puede resolver como una ECUACIÓN DIFERENCIAL EXACTA, pues $P'y = Q'x = -1$ √

Busco su función potencial (que define a *y* implícitamente):

$$\begin{cases} P_{(x,y)}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=2x-y \xrightarrow{\text{integro } m.a.m.} \varphi_{(x,y)}=x^2-xy+\alpha_{(y)} \\ Q_{(x,y)}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-x\ ^{(1)} \qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-y+\alpha'_{(y)}\overset{(1)}{=}-x\rightarrow\alpha'_{(y)}=0\rightarrow\alpha_{(y)}=K;(K\in\Re) \end{cases}$$

Por lo tanto, la función potencial es: $\varphi_{(x,y)}=x^2-xy+K$

Entonces: $x^2-xy=-K \text{ es solución} \rightarrow y=\dfrac{x^2+K}{x}$

Evalúo en las condiciones iniciales: $y_{(1)}=1 \rightarrow x=y=1$

$$1=\frac{1^2+K}{1}\rightarrow K=0 \Rightarrow y=y=\frac{x^2}{x}=x$$

Por lo tanto: $\boxed{\mathbf{C:\ y = x}}$

b) **Encontrar el mínimo absoluto de f(x,y) = $(x-2)^2+y^2$ restringido a C.**

C: y = x

Parametrizo la restricción: $\overline{\alpha}_{(t)}=(t,t);\ t\in\Re\rightarrow\overline{\alpha}'_{(t)}=(1,1)$

Analizo la forma de f(x,y) = z = $\mathbf{(x-2)^2+y^2}$

Es un paraboloide con vértice en (2,0) → z ≥ 0 (para todo (x,y) ε R^2)

Sea h: R → R; $h_{(t)}=f_{(\alpha(t))}$

$h_{(t)}=f_{(t,t)}=(t-2)^2+t^2=t^2-4t+4+t^2=2t^2-4t+4$

Busco los puntos críticos, derivando la función e igualándola a 0.

$h'_{(t)}=4t-4=0 \rightarrow 4t=4 \rightarrow \boxed{t=1} \rightarrow \alpha_{(1)}=PC_1=(1,1)$

El <u>único</u> P.C. hallado es el (1,1).

Analizo la segunda derivada y evalúo si es máximo o mínimo:

$h''_{(t)}=4>0$ → Mínimo relativo y absoluto

Por lo tanto **f encuentra su mínimo absoluto en el punto (1,1) y toma valor de 2.**