Indicar **claramente** apellido y número de padrón en cada hoja que entregue. Todas las respuestas deben estar **debidamente justificadas**. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS BIEN RESUELTOS

Nombre y Apellido: ....

Padrón: ....

1. Sean el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (x, 2y)$ y C el trozo de la lńea del campo $\vec{F}$ que va desde el punto $(1,1)$ al punto $(3,9)$. Hallar la circulación de $\vec{F}$ sobre la curva C y graficar la curva y el campo en un punto cualquiera de la curva.

2. Sea el cuerpo D definido por $z \geq x^2$, $x \geq z^2$, $0 \leq y \leq 3$. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (sen(yz), 2y+z, e^{xy})$ sobre la frontera de D excepto la cara contenida en el plano $y = 0$ con sentido de la normal saliente del cuerpo D.

3. Calcular la circulación del campo $\vec{F}(x,y,z) = (cos(x), sen(y), -x^3/3 + e^z)$ sobre la curva intersección de las superficies $x^2 + z^2 = 1$, $y = x^2 + 2z^2$. Graficar la curva e indicar la orientación utilizada.

4. Sea $\vec{F}(x,y) = (yf'(x), x^2 + f(x))$ siendo f una función $C^2(\mathbb{R})$. Calcular la circulación de $\vec{F}$ sobre la curva C definida por $(x-1)^2 + y^2 = 1$, indicando en un gráfico la orientación de C utilizada.

5. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial $C^2(\mathbb{R}^3)$ con matriz jacobiana simétrica, siendo $g(x,y,z) = ax^2 + y + 5z + 3$ la circulación de $\vec{F}$ sobre el segmento que va desde los puntos $(0,0,0)$ al (x,y,z). Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que la circulación de $\vec{F}$ sobre el segmento que va desde los puntos $(1,1,1)$ al $(2,-2,2)$ es -4.

AMII – INTEGRADOR del 21-2-14 (resuelto)

1. **Sean el campo vectorial $\vec{F}$(x,y)=(x,2y) y C el trozo de la línea de campo $\vec{F}$ que va desde el punto (1,1) al punto (3,9). Hallar la circulación de $\vec{F}$ sobre la curva C y graficar la curva y el campo en un punto cualquiera de la curva.**

Las líneas de campo cumplen:

$$\vec{F}(x_{(t)}, y_{(t)}) = (x'_{(t)}, y'_{(t)})$$

Por lo tanto, para resolverlo planteo:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{x}dx = \frac{1}{y}\,dy \quad \rightarrow \quad integrando\ m.a.m. \ \rightarrow \ \ln(|y|) = 2.\ln(|x|) + C\ ; \ (C\ \varepsilon\ R)$$

$$e^{ln(|y|)} = e^{2.ln(|x|)+C} = e^{ln(x^2)}.e^{C}$$

Por lo tanto, las líneas de campo de $\vec{\mathrm{F}}$ son:

$$\boxed{y = x^2.K} \quad (K\ \varepsilon\ R)$$

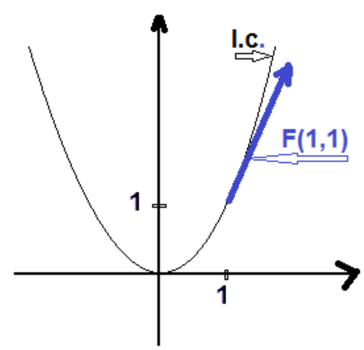
Piden "*graficar la curva y el campo en un punto cualquiera de la curva*" para eso, voy a evaluarla en el punto (1,1).

$y = x^2.K \rightarrow 1 = 1^2.K \ \rightarrow K = 1$

O sea, la línea de campo que pasa por (1,1) es $\boldsymbol{y = x^2}$

Por otro lado, hay que dibujar

el campo, para eso obtengo $\vec{F}(1,1) = (1,2)$



Para calcular la circulación, parametrizo:

$$C: \vec{\sigma}_{(t)} = (t, t^2)\ \ ; \ \ t\ \varepsilon\ [1,3] \quad \rightarrow \quad \vec{\sigma}\,'_{(t)} = (1,2t)$$

Verifico que la parametrización esté orientada como la necesito:

$$\vec{\sigma}_{(1)} = (1,1) \ = \ INICIO \ \ y \ \ \vec{\sigma}_{(3)} = (3,9) \ = \ FIN$$

Calculo la circulación sobre C:

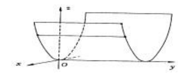
$$\int_C \vec{F}.d\vec{l} = \int_C \vec{F}_{(\vec{\sigma}(t))}.\vec{\sigma}\,'_{(t)}.dt = \int_C \vec{F}_{(t,t^2)}.(1,2t).dt = \int_1^3 (t, 2t^2).(1,2t).dt =$$

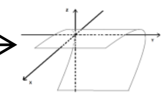
$$\int_1^3 t + 4\,t^3.dt = \boxed{84 = \int_C \vec{F}.d\bar{l}}$$

2. **Sea el cuerpo D definido por $z \leq x^2$, $x \leq z^2$, $0 \leq y \leq 3$. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (\operatorname{sen}(yz)\ ,\ 2y+z\ ,\ e^{xy})$ sobre la frontera de D excepto la cara contenida en el plano y=0 con sentido de la normal saliente del cuerpo D.**

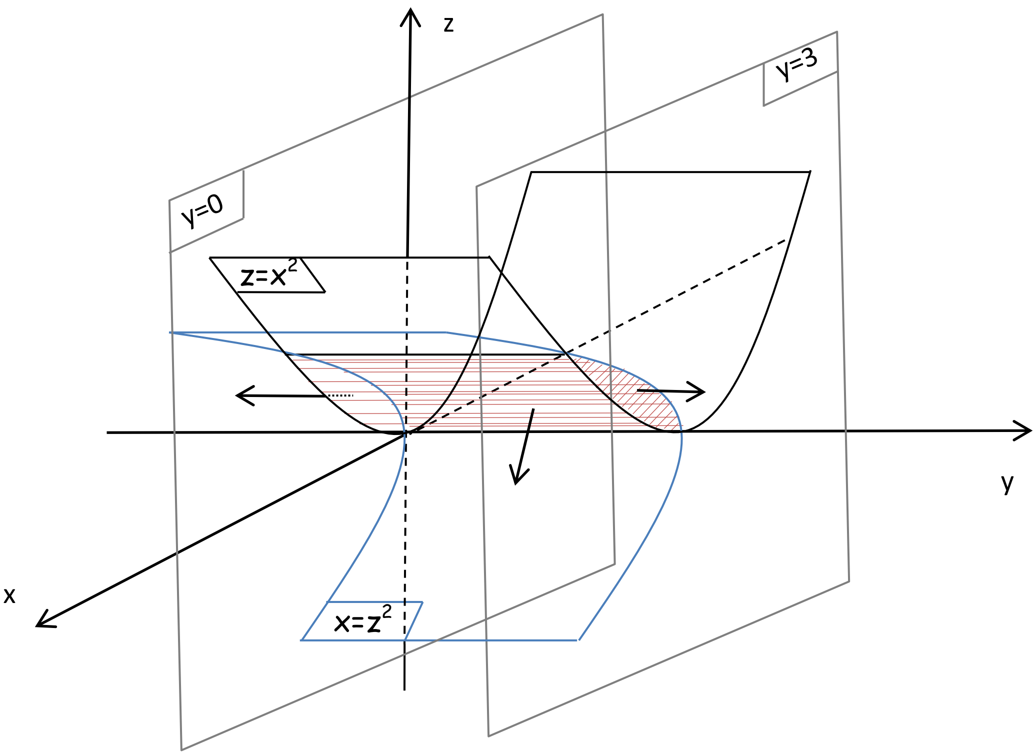
Analizo la forma de D (la intersección de las superficies que lo envuelven):

$$\begin{cases} z = x^2 \rightarrow z \geq 0 \rightarrow \text{cilindro parabólico (1)} - \textit{para arriba} \\ x = z^2 \rightarrow z = \sqrt{x} \rightarrow \text{cilindro parabólico (2)} - \textit{acostado} \\ y = 0 \rightarrow \textit{plano } xz\ ;\ y = 3 \end{cases}$$





Dibujo la intersección de esas superficies:



Por los datos del enunciado conocemos los límtes de **z** y de **y**:

$$\mathbf{0 \leq y \leq 3} \qquad y \qquad \boldsymbol{x^2 \leq z \leq \sqrt{x}}$$

Para hallar los límites de **x** busco las intersecciones de los cilindros parabólicos:

$$\begin{cases} z = x^2 \\ x = z^2 \end{cases} \rightarrow x = z^2 = (x^2)^2 = x^4 \ \rightarrow\ x = x^4 \ \rightarrow x = 0 \ \vee \ x = 1 \ \rightarrow\ \mathbf{0 \leq x \leq 1}$$

Sean: **A_1** : la superficie de la frontera de D contenida en el plano y = 0 ,

A_2 : la superficie de la frontera de D sin A_1

S : toda la superficie frontera de D → S = $A_1 \cup A_2$

Para calcular el flujo sobre A_2 (que es la que piden en el enunciado) voy a analizar si se cumplen las hipótesis del Teorema de Gauss. De esta manera, calculo el flujo sobre S y le resto el de A_1.

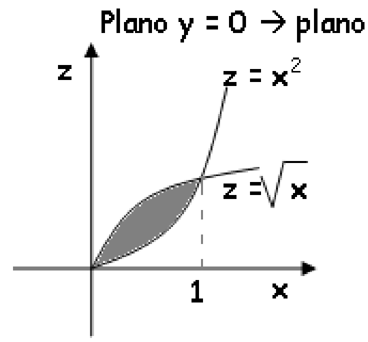
- ✓ D es una región compacta de $\Re^3$ cuya frontera S está orientada hacia el exterior (ver normal dibujada en el gráfico)
- ✓ $\vec{F}:\Re^3 \to \Re^3 con\ \vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right),\ donde\ P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}\ y\ R_{(x,y,z)} \in C^{\infty}(\Re^3)$ pues son funciones elementales $\therefore \vec{F} \in C^{\infty}(\Re^3) \to \vec{F} \in C^{1}(\Re^3)$

Se cumplen las hipótesis, por lo tanto:

$$\iint_S \vec{F}.d\bar{s} = \iiint_D div.\vec{F}.dvol = \iiint_D (0+2+0).dvol = 2\iiint_D dvol =$$
$$= 2\int_0^3\int_0^1\int_{X^2}^{\sqrt{X}} dz.dx.dy = 2\int_0^3\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx.dy == 2\int_0^3 \frac{1}{3}.dy = \frac{2}{3}.3 = 2$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F}.d\bar{s} = 2}$$

Para calcular el flujo sobre la cara que tengo que descontar, parametrizo esa superficie.



$$\vec{\sigma}_{(x,z)} = (x,0,z) \quad ; \ 0 \le x \le 1\ ,\ x^2 \le z \le \sqrt{x}$$
$$N = (0,-1,0) = \breve{n}$$

Calculo el flujo sobre A_1:

$$\iint_{A1} \vec{F}.d\bar{s} = \iint_{A1} \vec{F}_{(\sigma(x,z))}.\breve{n}.d\bar{s} = \iint_{A1} \vec{F}_{(x,0,z)}.(0,-1,0).d\bar{s} =$$
$$= \iint_{A1} \left(sen(0.z), 2.0+z, \mathrm{e}^{x.0}\right).(0,-1,0).d\bar{s} = \iint_{A1} -z.d\bar{s} =$$
$$= \int_0^1\int_{X^2}^{\sqrt{X}} -z.dz.dx = -\int_0^1 \left.\frac{z^2}{2}\right|_{X^2}^{\sqrt{X}}.dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x - x^4.dx = -\frac{1}{2}\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1 =$$

$$\boxed{= -\frac{3}{20} = \iint_{A_1} \vec{F}.d\bar{s}}$$

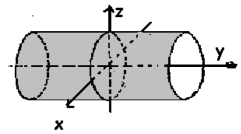
$$\iint_{A1} \vec{F}.d\bar{s} + \iint_{A2} \vec{F}.d\bar{s} = \iint_S \vec{F}.d\bar{s} \ \Rightarrow \iint_{A2} \vec{F}.d\bar{s} = \iint_S \vec{F}.d\bar{s} - \iint_{A1} \vec{F}.d\bar{s} = 2 - \left(-\frac{3}{20}\right) = \frac{43}{20}$$

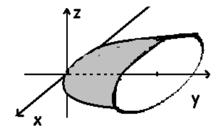
$$\boxed{\iint_{A2} \vec{F}.d\bar{s} = \frac{43}{20}}$$

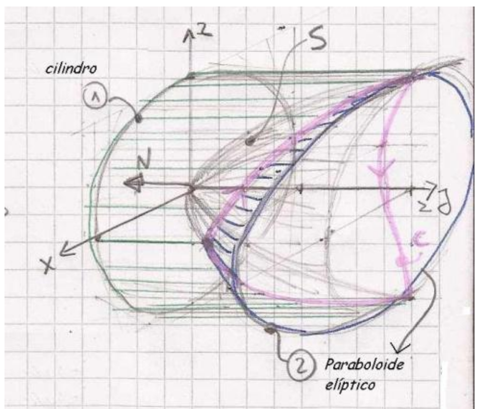
3. **Calcular la circulación del campo $\vec{F}$(x,y,z)=(cos(x) , sen(y) , $-x^3/3+e^z$) sobre la curva intersección de las superficies $x^2 + z^2 = 1$, $y= x^2 + 2z^2$. Graficr la curva e indicar la orientación utilizada.**

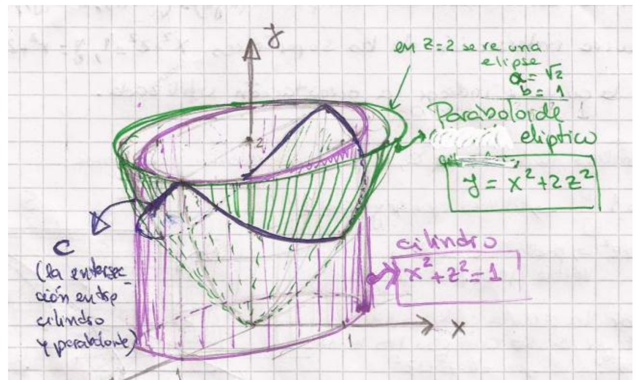
Primero analizo la forma de la curva de intersección mencionada, que voy a llamar C:

$$C:\begin{cases} x^2+z^2=1 \rightarrow \text{cilindro con eje coincidente con el eje } 'y', \text{de radio } 1 \\ y=x^2+2z^2 \rightarrow \text{paraboloide elíptico con vértice en } (0,0,0), \text{sobre eje } 'y' \end{cases}$$









Es la misma forma, pero con los ejes rotados para ver mejor la forma de C

Para calcular la circulación pedida voy a analizar si se cumplen las hipótesis necesarias para utilizar el Teorema de Stokes:

- ✓ Sea S la superficie perteneciente al paraboloide elíptico encerrada por C, veo que es una superficie suave y orientable.
- ✓ C (borde de S) es una curva suave y orientada positivamente.
- ✓ $\vec{F}:\Re^3 \rightarrow \Re^3 \text{con } \vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right), \text{ donde } P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)} \text{ y } R_{(x,y,z)} \in C^{\infty}(\Re^3)$ pues son funciones elementales (trigonométricas, exponenciales y/o polinomios)

$$\therefore \vec{F} \in C^{\infty}(\Re^3) \rightarrow \vec{F} \in C^{1}(\Re^3)$$

Como se cumplen las hipótesis, puedo calcular la circulación utilizando el Teorema deStokes:

$$\oint_{C^+} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_S rot.\vec{F}.d\bar{s} = \iint_S rot.\vec{F}.\breve{n}.ds$$

donde:

$rot.\vec{F} = (0, x^2, 0);$

$\breve{n}$: *Normal unitaria del paraboloide elíptico. Para hallarla parametrizo la superficie.*

Ecuación del paraboloide elíptico: $y = x^2 + 2z^2$, por lo tanto:

$$\vec{\beta}(x,z) = (x, x^2 + 2z^2, z);\ con\ x,z \in \Re$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \overline{\beta}_{(x,z)}}{\partial x} = (1,2x,0) \\ \dfrac{\partial \overline{\beta}_{(x,z)}}{\partial z} = (0,2z,1) \end{array}\right\} N = (2x,-1,4z).$$

$$\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_S \underbrace{(0, x^2, 0)}_{rot.\vec{F}} . \underbrace{\frac{(2x,-1,4z)}{\|N\|}}_{\breve{n}} .ds = \iint_D \frac{-x^2}{\|N\|}\|N\| dx.dz = \iint_D -x^2 .dx.dz =$$

D es la proyección de *S* sobre el plano *xz*, siendo un disco centrado en el origen de coordenadas, con radio que varía desde 0 hasta 1, por lo que considero conveniente hacer un cambio de variables, a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r.\cos(t) \\ y = x^2 + 2z^2 = r^2.\cos^2(t) + 2.r^2.sen^2(t) \\ z = r.sen(t) \end{cases} \qquad 0 \le r \le 1 \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

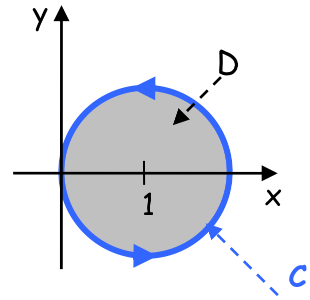
Por lo tanto: $-x^2 = -r^2.\cos^2(t)$

Entonces:

$$\overset{\substack{cambio de \\ variable}}{=} \iint_{D^*} \overbrace{-r^2.\cos^2(t)}^{-x^2} . \overset{jac.}{r}\, dr.dt = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3.\cos^2(t).dr.dt = -\int_0^{2\pi} \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 .\cos^2(t).dt = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2(t).dt = -\frac{1}{4}\pi$$

$$\boxed{\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = -\frac{\pi}{4}}$$

4. **Sea $\vec{F}$(x,y)=(y.f'$_{(x)}$, x^2 + $f_{(x)}$) siendo una f una función C^2 (R). Calcular la circulación de $\vec{F}$ sobre la curva C definida por $(x-1)^2 + y^2 = 1$, indicando, en un gráfico la orientación de C utilizada.**



Comienzo analizando la forma de C:

C: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ → circunferencia de radio 1

con centro en (1,0)

Como piden calcular la circulación de un campo $R^2 \to R^2$ analizo si se cumplen las hipótesis necesarias para utilizar el Teorema de Green.

- ✓ D es una región compacta cuyo borde es C, una curva cerrada y suave
- ✓ $\vec{F} : \Re^2 \to \Re^2 con \ \vec{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}\right), \ donde \ P_{(x,y,z)} \in C^1(\Re^2), pues \ f \in C^2(\Re^2) \to f' \in C^1(\Re^2)$

$$y\, Q_{(x,y,z)} \in C^2(\Re^2), pues\ es\ suma\ algebraica\ de\ un\ \underbrace{polinomio}_{C^\infty}\ y\ f \in C^2(\Re^2)$$

$$\therefore \vec{F} \in C^1(\Re^2)$$

Como se cumplen las hipótesis del T. Green puedo decir que:

$$\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_D \left(Q'_X - P'_Y\right) dx.dy$$

$P_{(x,y)}$ =y.f ' $_{(x)}$ → P ' $_y$ = f ' $_{(x)}$

$Q_{(x,y)} = y^2 + f_{(x)}$ → Q ' $_x$ = 2x + f ' $_{(x)}$

Q ' $_x$ - P ' $_y$ = 2x + f ' $_{(x)}$ - f ' $_{(x)}$ = 2x

Por la forma que tiene C conviene trabajar la integral con coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = 1 + r.\cos(t) \\ y = r.\text{sen}(t) \end{cases}$$

con $0 \le r \le 1$

$0 \le t \le 2\pi$ Jacobiano= r

Entonces:

$$\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_D 2x dx.dy \overset{\text{cambio coord.}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 2.\overbrace{(1+r.\cos(t))}^{X}.\overbrace{r}^{Jac.}\, dr.dt = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r + r^2\cos(t)\right) dr.dt =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3}.\cos(t)\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} dt = 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\cos(t)\right).dt = 2\pi$$

$$\boxed{\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = 2\pi}$$

5. **Sean $\vec{F}$ un campo vectorial $C^2(R^3)$ con matriz jacobiana simétrica siendo $g(x,y,z)=a.x^2 + y + 5z + 3$ la circulación de $\vec{F}$ sobre el segmento que va desde los puntos (0,0,0) AL (X,Y,Z). Determinar el valor de a ε R sabiendo que la circulación de $\vec{F}$ sobre el segmento que va desde los puntos (1,1,1) al (2,-2,2) es -4.**

Como:

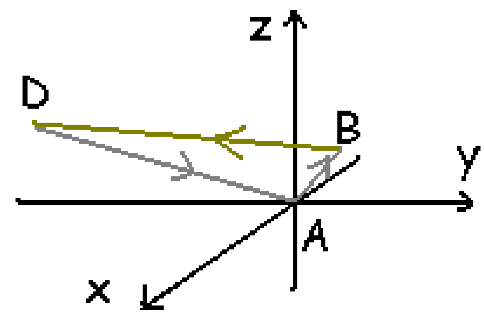
- ✓ $\vec{F}$ ε $C^2(R^3)$
- ✓ el dominio (R^3) es abierto y simplemente conexo
- ✓ la matriz jacobiana es simétrica

entonces $\vec{F}$ es un campo conservativo, por lo que la circulación sobre cualquier curva cerrada es 0.

Sean: A=(0,0,0) ; B=(1,1,1) ; D=(2,-2,2)

$$\bar{a} = \overline{AB} \;;\; \bar{b} = \overline{BD} \;;\; \bar{d} = \overline{DA}$$

$$C = \bar{a} \cup \bar{b} \cup \bar{d}$$



Entonces:

$$\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = \int_{\overline{AB}} \vec{F}.d\bar{l} + \int_{\overline{BD}} \vec{F}.d\bar{l} + \int_{\overline{DA}} \vec{F}.d\bar{l}$$

Por enunciado: $\boxed{\int_{\overline{BD}} \vec{F}.d\bar{l} = -4}$

La circulación de (0,0,0) a (x,y,z) es g(x,y,z) = ax2 + y + 5z + 3 , por lo tanto:

la circ. de $\bar{a} = \overline{AB}$ va de A=(0,0,0) a B =(1,1,1)→ $\int_{\overline{AB}} \vec{F}.d\bar{l} = g_{(1,1,1)} =$

$$= a.1^2 + 1 + 5.1 + 3 = \boxed{a + 9 = \int_{\overline{AB}} \vec{F}.d\bar{l}}$$

la circ. de $\bar{d} = \overline{DA}$ va de D=(2,-2,2) a A=(0,0,0) → $\int_{\overline{DA}} \vec{F}.d\bar{l} = -\int_{\overline{AD}} \vec{F}.d\bar{l} = -g_{(2,-2,2)} =$

$$= -\left(a.2^2 + (-2) + 5.2 + 3\right) = \boxed{-(4a + 11) = \int_{\overline{DA}} \vec{F}.d\bar{l}}$$

Entonces:

$$\underbrace{\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l}}_{0} = \underbrace{\int_{\overline{AB}} \vec{F}.d\bar{l}}_{a+9} + \underbrace{\int_{\overline{BD}} \vec{F}.d\bar{l}}_{-4} + \underbrace{\int_{\overline{DA}} \vec{F}.d\bar{l}}_{-4a-11}$$

0 = -3a -6 → 3a = -6 → $\boxed{a = -2}$

¡¡ EXITOS PARA EL EXAMEN !!