GUÍA RÁPIDA PARA INTERPRETAR
UNA DESCRIPCIÓN DE CONJUNTO

A continuación voy a escribir la descripción de un conjunto y lo voy a separar en pasos a considerar:

$$C = \{ (x,y,z) \text{ e } R^3 : x^2 + y^2 = 2 \; ; \; x+y+z = 2 \}$$

(5) (1) (2) (3) (4)

(1) <u>Identificar el espacio de trabajo</u> (si es $\mathbf{R^2}$ o $\mathbf{R^3}$ **):**

Hay que prestar mucha atención para poder interpretar correctamente las ecuaciones (por ej. $x^2+ y^2 = 4$ en R^2 es una circunferencia de radio 2 centrada en el origen mientras que en R^3 es un cilindro de radio 2 con el eje Z como eje)

(2) <u>Analizar la primer ecuación:</u>

Con "analizarla" me refiero a la forma que tiene y si tiene un '=' o '>' o '<' o '$\geq$' o '$\leq$'.

- ✓ Si es una <u>igualdad</u> en R^3 entonces estamos frente a una **superficie** mientras que si es R^2 entonces es una recta o una **curva**.

- ✓ Si es una <u>desigualdad</u> en R^3 entonces estamos trabajando con un **cuerpo** (la superficie y su interior/exterior, o su interior/exterior, según cuál sea la desigualdad) mientras que si es en R^2 entonces estamos con una **superficie** en el plano xy.

(3) <u>Separador:</u>

Puede ser ; o una , o $\wedge$ … todos ellos indican que existe más de una restricción o condición.

(4) <u>Analizar la segunda ecuación:</u>

La segunda ecuación muestra otra restricción sobre la primera ecuación. Y la analizamos de forma análoga a como lo hicimos con la primera ecuación.

Ahora bien, se pueden dar los siguientes casos (al menos, para los conjuntos que se suelen utilizar en Análisis Matemático II – Fiuba), que surgen de la intersección de las formas dadas por las dos ecuaciones:

- ✓ " = " y " = ": Si la primera había sido una igualdad, entonces, vamos a tener (como intersección) una **curva** (o sea, una circunferencia, una elipse, un trozo de alguna de ellas, una recta…).
- ✓ " < " y " = ": Si la primera fue una desigualdad entonces vamos a tener una **superficie contenida en la superficie dada por la segunda ecuación** (limitada por la intersección con la superficie de la primera ecuación)
- ✓ " = " y " < ": Si la primera fue una igualdad y la segunda una desigualdad entonces vamos a tener una **superficie contenida en la superficie dada por la primera ecuación** (limitada por la intersección con la frontera de la segunda ecuación)
- ✓ " < " y " < ": Si las dos ecuaciones son desigualdades, estamos hablando de un cuerpo sólido, limitado por las superficies que se obtienen de considerar a las dos ecuaciones como igualdades (así obtenemos la frontera del cuerpo)

Algunos datos a tener en cuenta:

Si después de la segunda ecuación, existen más separadores, se procede de manera similar como se analizó la segunda ecuación.

Si alguna de las ecuaciones es del tipo: $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$, entonces la tenemos que considerar como DOS ecuaciones, que serían:

$$1 \leq x^2+y^2+z^2 \quad \text{y} \quad x^2+y^2+z^2 \leq 4$$

y, entonces, estaríamos ante el caso de un sólido cuyas fronteras son las esferas de radio 1 y de radio 2.

En pocas palabras, todas las ecuaciones dadas dentro de la descripción definen una curva o región (que puede ser en R^2 o R^3) que se obtiene de la intersección de las formas de todas las ecuaciones.

Por otra parte, hay que tener en cuenta el texto que acompaña a la descripción, pues suelen orientar lo que tenemos que encontrar. Por ejemplo, nos dicen:

"*Un sólido ocupa la región…*" es claro que lo que se define es un **cuerpo** y no una superficie.

"…*a través de la frontera de W…*" (en R^3), por lo tanto W es un sólido.

"*… a lo largo de la frontera de la región D*", (en R^2), por lo tanto D es una superficie.

"*Calcular la masa de la superficie…*" habla acerca de trabajar sobre la **superficie** y no está diciendo acerca del volumen.

Un dato sobre las "superficies y normales":

Una superficie orientada al exterior es aquella en la cual la Normal es **saliente**. Y una normal es saliente si, observando el cuerpo que estamos estudiando, la normal se aleja del centro del cuerpo.

(este tema de analizar normal saliente o entrante, y superficie orientada hacia el exterior, es para utilizar el teorema de Gauss y poder calcular Flujo sobre la superficie)

Si trabajamos sobre Circulación, la normal no es entrante o saliente, pues la circulación se calcula sobre una curva. Para usar el teorema de Stokes (en R^3) vamos a analizar la superficie que queda encerrada por la curva. En este caso, la circulación puede estar orientada positivamente si, utilizando, por ejemplo, la regla de la mano derecha, nos indica que la normal que vamos a utilizar está en el sentido que necesitamos.

Otro dato más... cuando nos dan una inecuación $z \geq x^2+y^2$, ¿cómo saber qué parte del paraboloide tenemos que estudiar?

Bueno… toman un punto que cumpla la ecuación. Por ejemplo (0,0,1), cumple pues $1 \geq 0$…. Ese punto ¿de qué lado de la superficie frontera (o sea, del paraboloide) está? Bueno… del lado en donde se encuentre ESE punto, es donde todos los puntos cumplen que $z \geq x^2+y^2$. En este caso, es la parte de "adentro" del paraboloide.

(5) <u>Nombre del conjunto:</u>

Esto es un dato menor, por eso lo escribí en último término.

Por lo general, los profesores suelen nombrar cada conjunto según el tipo de forma que tomará. Por ejemplo:

- **C**: suelen describir una curva (puede ser en R^2 o R^3)
- **D**: suelen describir una superficie en R^2
- **S**: suelen describir una superficie en R^3
- **V, W, M**: suelen describir un volumen o la superficie frontera de un volumen (R^3)

DOS EJEMPLOS DE DESCRIPCIÓN DE CONJUNTOS

(del coloquio del 4-7-13)

"Un sólido ocupa la región

W={(x,y,z)e R^3 : $x^2+y^2 \leq 4$, $y \leq z \leq 3y$}"

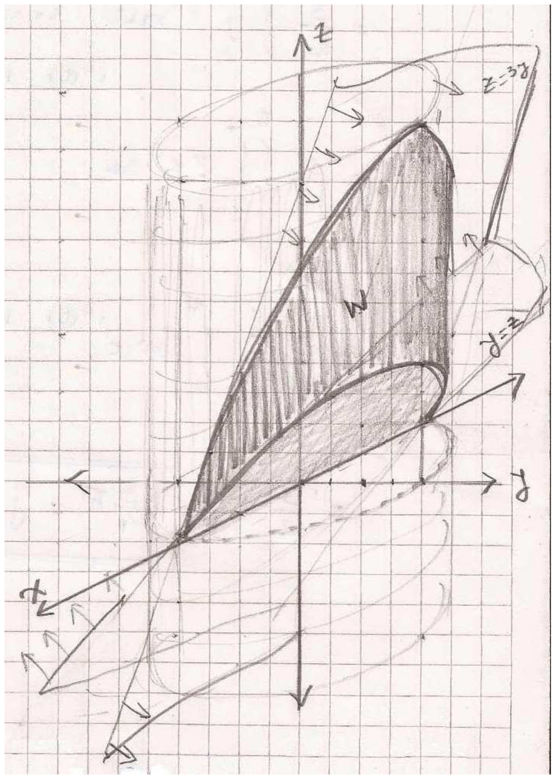
Primero analizo los bordes (o sea, analizo las Igualdades)

$x^2+y^2 = 4$ => *Cilindro cuyo eje es el eje z, cuyo radio es 2*

y = z => plano y-z=0 (N= (0,1,-1))

z = 3y => plano -3y+z=0 (N= (0,-3,1))

Con esos datos obtengo el cuerpo W



(del coloquio 25-7-13)

"a través de la superficie

$z=9 - x^2 - y^2$ *con* ***$z \leq 6 - 2x$*** *"*

Otra forma de escribirlo:

"a través de la superficie

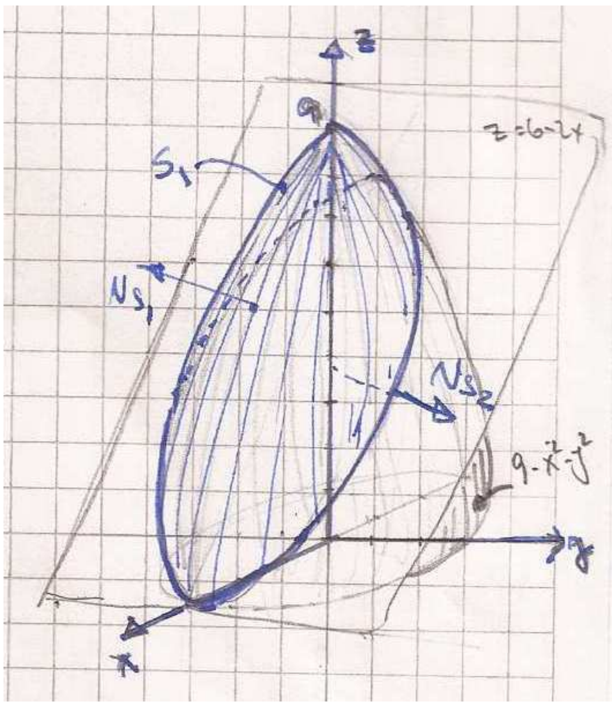
S={(x,y,z)e R^3: $z=9 -x^2-y^2$, $z \geq 6-2x$}"

Analizo los bordes:

$z=9 -x^2-y^2$ => paraboloide invertido,

con vértice en (0,0,9)

z = 6-2x => *plano 2x+z=6 (N=(2,0,1))*



en este caso, la Normal escrita sería entrante, por lo que (como piden calcular el Flujo, tenemos que tomar la N=(-2,,0,-1)