(215)

FIUBA 19-12-13 — Análisis Matemático II (61.03, 81.01) — Integrador - Tema 1

Indicar **claramente** apellido y número de padrón en cada hoja que entregue. Todas las respuestas deben estar **debidamente justificadas**. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

Apellido: .... Nombres : ....

Padrón: .... Código materia: .... Curso: ....

1. Hallar, analíticamente, la distancia mínima entre el punto $(0,0)$ y la curva, contenida en el primer cuadrante, definida por la ecuación diferencial $2xy\ dx + x^2\ dy = 0$ que pasa por el punto $(1,2)$. Graficar la curva.

2. Hallar el área de la porción de superficie descripta por $z = 2x^2$ con $y \leq x$, $z \leq 9 - x^2$, en el primer octante.

3. Sea $\vec{F}(x,y,z) = (3, f(x,y,z), f(x,y,z))$ un campo vectorial $C^2(\mathbb{R}^3)$. Verificar que la circulación del campo a lo largo del perímetro del triángulo de vértices $(1,2,2) \to (-3,4,0) \to (0,0,4) \to (1,2,2)$ es nula.

4. Hallar a y b de manera que el campo $\vec{F}(x,y,z) = (axy + z, x^2, bx + 2z)$ sea conservativo. Para los valores hallados calcular la circulación del campo a lo largo de la curva intersección de las superficies $2x + y + z = 3$ y $9x^2 + 9y^2 + 2z^2 = 18$ en el primer octante, desde $(1,1,0)$ hasta $(0,0,3)$. Graficar las superficies y la curva.

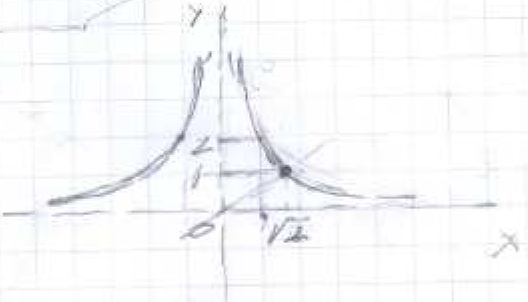
5. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z)$ y S la superficie descripta por $z = a(1 - \sqrt{x^2+y^2})$, $z \geq 0$. Hallar $a > 0$ de manera que el flujo de $\vec{F}$ a través de S, orientada de manera que su normal tenga componente z positiva, sea π.

1 $2xy\,dx + x^2\,dy = 0$

$d(x^2y) = 0$

$x^2y = C$ $(1,2)$

$x^2y = 2$



$f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + \dfrac{4}{x^4}$

$x > 0$

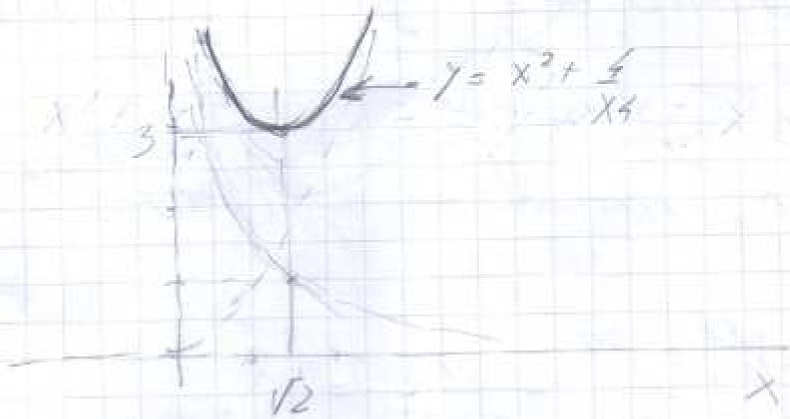
$f'(x) = 2x - 16x^{-5} = 2x - \dfrac{16}{x^5} = \dfrac{2}{x^5}(x^6 - 8)$

$(x>0)$ $x_0 = 8^{1/6} = (2^3)^{1/6} = 2^{3/6} = \sqrt{2}$

$y_0 = \dfrac{2}{x_0^2} = 1.$ $(\sqrt{2}, 1)$ ∴ único punto crítico en $(0,+\infty)$

x_0 y_0

$f''(x) = 2 + 16 \cdot x^{-6} \Rightarrow f''(x_0) > 0$ ∴ mínimo.



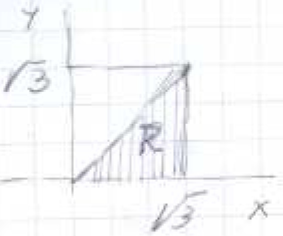
2

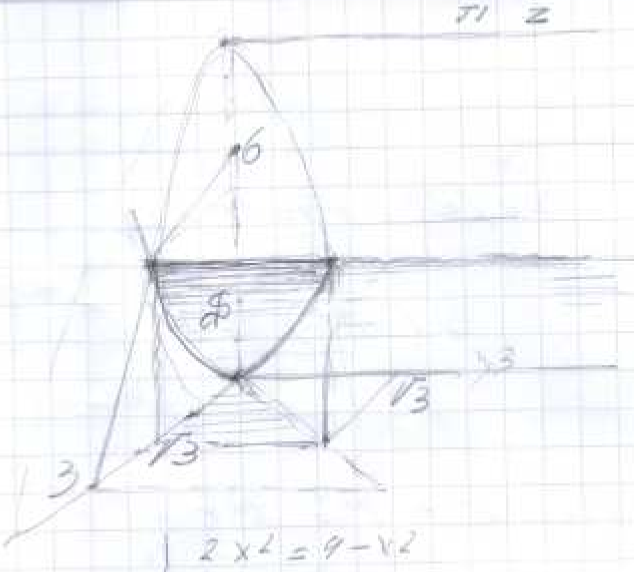
$z = 2x^2$

$y \le x$

$z \le 9 - x^2$

PRIMER OCTANTE





$2x^2 = 9 - x^2$

$3x^2 = 9 \quad |x| = \sqrt{3}$

$\phi(x,y) = (x, y, 2x^2)$

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = (1, 0, 4x) \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} = (-4x, 0, 1)$

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = (0, 1, 0) \qquad \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + 16x^2}$

$$AREA(S) = \iint_R \sqrt{1+16x^2}\, dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left[\int_0^x \sqrt{1+16x^2}\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+16x^2}\, dx = \left[\frac{1}{48}(1+16x^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{48}\left(\overbrace{1+16 \cdot 3}^{49}\right)^{3/2} - \frac{1}{48} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 7^3 - \frac{1}{48} = \frac{343-1}{48} = \frac{\cancel{342}^{171}}{\cancel{48}_{24}} = \frac{171}{24} = \boxed{\frac{57}{8}}$$

3

$$\vec{F}(x,y,z) = \{3,\ f(x,y,z),\ f(x,y,z)\}$$

$$\text{ROT}\,\vec{f}(x,y,z) = \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z},\ -\frac{\partial f}{\partial x},\ +\frac{\partial f}{\partial x}\right]$$

$$\overset{P}{(1\ 2\ 2)} \longrightarrow \overset{Q}{(-3,4,0)} \longrightarrow \overset{R}{(0,0,4)}$$

$$\vec{u} = Q - P = (-4,\ 2,\ -2)$$

$$\vec{v} = R - P = (-1,\ -2,\ 2)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0,\ 10,\ 10) \parallel (0,1,1)$$

EL PLANO QUE CONTIENE A LOS TRES VÉRTICES DEL TRIÁNGULO TIENE ECUACIÓN

$$\pi:\ \boxed{y + z = 4}$$

CHEQUEO: $(1,2,2)$ ✓
$(-3,4,0)$ ✓
$(0,0,4)$ ✓

POR LO TANTO, UN NORMAL A π ES $\check{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$

Y ES $\underline{\text{ROT}\,\vec{F}\cdot\check{n}} = -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$

$$\therefore\ 0 = \iint_{\text{TRIÁNGULO}} \text{ROT}\,\vec{F}\cdot\check{n}\,da \overset{\text{STOKES}}{=} \oint_{\partial\,\text{TRIÁNG.}} \vec{F}\cdot\check{T}\,dl$$

4

4)

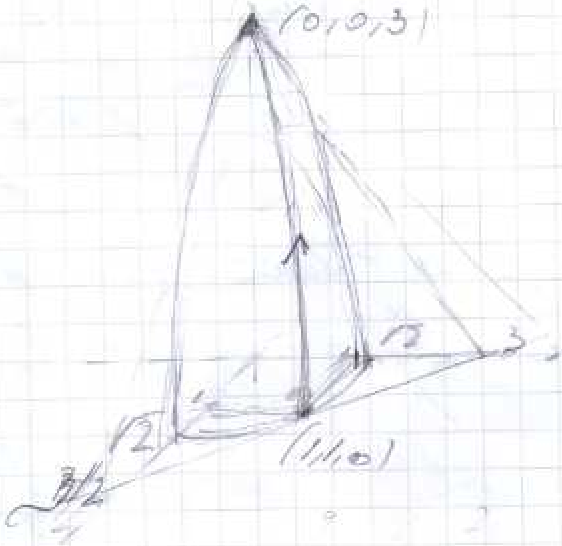
$\vec{F}(x,y,z) = (axy+z,\ x^2,\ bx+2z)$

$JF = \begin{bmatrix} * & ax & 1 \\ 2x & * & 0 \\ b & 0 & * \end{bmatrix}$ $\quad a=2$, $b=1$

$\vec{F}(x,y,z) = (2xy+z,\ x^2 + x+2z) =$

$\vec{\nabla}\left(\underbrace{x^2y+zx+z^2}_{\phi(x,y,z)}\right)$

$S_1:\ 9x^2+9y^2+2z^2=18$ $\quad\Big|\quad \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{9}=1$



$S_2:\ 2x+y+z=3$

$\frac{x}{3/2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$

CIRCULACION:

$\phi(0,0,3) - \phi(1,1,0) =$

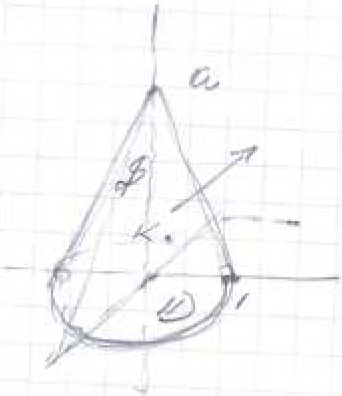
$= 9 - 1 = 8$

5)

$\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z)$ $\quad DIV = [3(x^2+y^2)+1]$

$z = a(1-\sqrt{x^2+y^2})$ $\quad z \geq 0 \quad a>0$

$$\overbrace{\iiint_K [3(x^2+y^2)+1]\,dx\,dy\,dz}^{(I)} =$$



$$= \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}_{ext}\,dA + \underbrace{\iint_D \overbrace{\vec{F}\cdot(0,0,-1)}^{=0 \text{ en } D}\,dA}_{=0}$$

$x = \rho\cos\theta$ | $0 \leq \rho \leq 1$

$y = \rho\sin\theta$ | $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$z = z$ | $0 \leq z \leq a(1-\rho)$

$|J| = \rho$

$$(I) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\,d\rho \int_0^{a(1-\rho)} (3\rho^2+1)\,dz =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho(3\rho^2+1)\,a(1-\rho)\,d\rho$$

$$= 2\pi a \int_0^1 (3\rho^2+1)(\rho-\rho^2)\, d\rho =$$

$$= 2\pi a \int_0^1 \left[3\rho^3 - 3\rho^4 + \rho - \rho^2\right] d\rho$$

$$= 2\pi a \left[\frac{3\rho^4}{4} - \frac{3}{5}\rho^5 + \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = \ldots$$

$$= 2\pi a \left(\underbrace{\frac{3}{4} - \frac{3}{5}}_{\frac{3}{20}} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{\frac{1}{6}}\right) =$$

$$= 2\pi a \cdot \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6}\right) = 2\pi a \, \frac{9+10}{60} = \pi a \, \frac{19}{30}$$

$$a = \frac{30}{19}$$