Integrador resuelto del 15-2-2013

1) Hallar en coordenadas cartesianas la ecuación de la familia de las líneas de campo:

$$\overline{F}(x,y)=\left(\frac{1}{4x-y},\frac{1}{x}\right)$$

<u>Solución</u>: En este ejercicio Las líneas de campo se determinan de la ec. Diferencial

$$\frac{dx}{\frac{1}{4x-y}}=\frac{dy}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{x}dx=\frac{1}{4x-y}dy \quad \to \quad (4x-y)\ dx = x\ dy \quad \to \ 4-\frac{y}{x}=y' \ \to y'+\frac{1}{x}y=4$$

Esta es una ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL .

O bien, si se trabaja con la ecuación $\underbrace{(4x-y)}_{P(x,y)}\ dx\ \underbrace{-x}_{Q(x,y)}\ dy=0$, se puede resolver como ECUACIÓN DIFERENCIAL EXACTA.

Si expresa $\frac{dy}{dx}=\frac{4x-y}{x}$ se puede ver que es una ECUACIÓN DIFERENCIAL HOMOGENEA.

Cualquier método que se use, la solución son las líneas de campo.

Por ejemplo: La ecuación $\underbrace{(4x-y)}_{P(x,y)}\ dx\ \underbrace{-x}_{Q(x,y)}\ dy=0$ cumple:

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \to \quad -1=-1$ es una Ecuación Dif. Exacta, se encuentra la función potencial:

$$\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x}=\underbrace{(4x-y)}_{P(x,y)} \quad \Rightarrow \quad \mu(x,y)=\int (4x-y)\ dx = 4\frac{x^2}{2}-yx+C(y)$$

$$\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y}=-x+C'(y)=-x \quad \Rightarrow \quad C'(y)=0 \quad \Rightarrow \quad C(y)=C$$

$$\mu(x,y)=2x^2-yx+C$$

RTA: Las líneas de campo son: $\underline{2x^2-xy=K}$

2) Hallar el Área de la Superficie:

$$R = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4; -\sqrt{2} \le z \le \sqrt{2} \ ; \ 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{3}} x \right\}.$$

Solución: Para determinar el área de la porción de superficie esférica, consideramos una parametrización de la superficie esférica dada por:

$\underline{x^2 + y^2 + z^2 = 4}$. Se puede tomar esta parametrización de toda la esfera:

$$\overline{G}(\theta,\varphi) = (2\cos(\theta)sen(\varphi), 2sen(\theta)\, sen(\varphi), 2\cos(\varphi)) \ , \quad 0 \le \theta < 2\pi \ , \quad 0 \le \varphi \le \pi$$

Siendo:

$$-\sqrt{2} \le z \le \sqrt{2} \ \rightarrow \ -\sqrt{2} \le 2\cos(\varphi) \le \sqrt{2} \ \rightarrow \ -\sqrt{2}/2 \le \cos(\varphi) \le \sqrt{2}/2 \ \rightarrow \ \underline{\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}}$$

$$0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{3}} x \ \rightarrow \ 0 \le 2sen(\theta)\, sen(\varphi) \le \frac{1}{\sqrt{3}} 2\cos(\theta)\, sen(\varphi) \ \rightarrow \ 0 \le tg(\theta) \le \frac{1}{\sqrt{3}} \ \rightarrow \ \underline{0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}}$$

El vector normal a la Superficie es:

$$N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2\,sen(\theta)sen(\varphi) & 2\cos(\theta)sen(\varphi) & 0 \\ 2\cos(\theta)\cos(\varphi) & 2\,sen(\theta)\cos(\varphi) & -2sen(\varphi) \end{vmatrix} =$$

$$\left(-4\cos(\theta)sen^2(\varphi), 4\,sen(\theta)sen^2(\varphi), \ -4\,sen^2(\theta)sen(\varphi)\cos(\varphi) - 4\cos^2(\theta)sen(\varphi)\cos(\varphi)\right) =$$

$$\rightarrow \quad \underline{N = (-4\cos(\theta)sen^2(\varphi), 4\,sen(\theta)sen^2(\varphi), \ -4\,sen(\varphi)\cos(\varphi))}$$

$\Rightarrow$

$$\|N\| = \sqrt{16\,sen^4(\varphi) + 16\,sen^2(\varphi)\cos^2(\varphi)} = \sqrt{16sen^2(\varphi)} = 4\,sen(\varphi)$$

$\Rightarrow$

El área es:

$$A = \iint_s \|N\| d\theta\, d\varphi = \int_0^{\pi/6} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 4\,sen(\varphi)\ d\varphi \ \ d\theta = \int_0^{\pi/6} 4(-\cos(\varphi)\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta = -4(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})\frac{\pi}{6} = 4\sqrt{2}\,\frac{\pi}{6}$$

$$\underline{\underline{A = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi}}$$

3) Sean $B=\left\{(x,y)\in R^2 : x+y=1 \ ; \ \dfrac{1}{3}\le x\le \dfrac{3}{4}\right\}$ **y** $g:R^2\to R \ / \ g(x,y)=x\,y$ **. Hallar los extremos absolutos de *g* restringido a *B*.**

<u>**Solución**</u>:

El conjunto *B* es el segmento de la recta y =1 – *x*, desde el punto (1/3, 2/3) al punto (3/4, ¼).

Una parametrización de la recta es:

$$\overline{f}(x)=(x,1-x)$$
$$h(x)=g(\overline{f}(x))=x(1-x)=x-x^2$$
$$h'(x)=1-2x=0 \quad \to \ x=\frac{1}{2}$$
$$h''(x)=-2<0 \ , \ \ en \ \ x=\frac{1}{2} \ \ máximo \ relativo$$
$$Valor \ \ máximo: \ g(1/2 \ , 1/2)=1/4$$

Como la función está definida en un conjunto compacto (acotado y cerrado), alcanza un valor máximo y mínimo absolutos, encontramos los valores que g toma en los extremos del segmento:

$$g(1/3, \ 2/3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9} \qquad y \qquad g(3/4, 1/4)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

Siendo: $1/4>2/9$; $1/4>3/16$; $2/9>3/16$. La función presenta el mínimo absoluto en el punto (3/4 ¸ 1/4) y su valor es 3/16 y el máximo absoluto en (1/2, 1/2) de valor ¼.

4) Sea la curva $L=\left\{(x,y,z)\in R^3 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+z^2=2 \ ; \ z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \ ; \ a>0 : b>0\right\}$ **y el campo vectorial** $\overline{F}(x,y,z)=\left(3y, \ 6x \ , \ h(x,y)\right)$ **con *h* campo escalar** $\mathbf{C^1(R^2)}$**. Calcular la circulación de** $\overline{F}$ **a lo largo de *L* en función de *a* y *b*. Indicar en un gráfico cómo debe orientarse la curva *L* para que el valor de la circulación sea positivo.**

<u>**Solución**</u>: Siendo $\overline{F}$ de clase C^1 y L una curva cerrada suave, se puede aplicar Teorema de Stokes, que dice que “Sea $\overline{F}$ de clase C^1 y S una superficie abierta cuya frontera L es una curva suave, la circulación de $\overline{F}$ a lo largo de $L=\partial S$ coincide con el flujo del Rotor de $\overline{F}$ a través de la Superficie: $\int_L \overline{F}.\overline{dl}=\iint_S \nabla\times\overline{F} \ . \ \breve{n} \ ds$”.

$\overline{F}$ es de clase C^1 pues sus dos primeras componentes son polinomios, por lo tanto derivables con derivada continua y la tercera componente $h(x,y) \ es \ C^1$ por hipótesis.

La curva L está dada por la intersección de la esfera con el paraboloide:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+z^2=2 \\ z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \end{cases} \quad \to \quad z+z^2=2 \quad \to \quad z^2+z-2=0 \quad \to \quad z=1 \quad pues \quad z>0$$

$$\Rightarrow \; L: \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad elipse \; en \; z=1, \; por \; lo \; \tan to \; suave$$

Aplicamos Stokes, considerando la Superficie abierta dada por la porción del plano $z=1$ cuya frontera es la elipse de ecuación: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, el vector normal al plano $z=1$ es:

$$\breve{n}=(0,0,1) \;\Rightarrow\; \int_L \overline{F}\,.\,\overline{dl}=\iint_S \nabla\times\overline{F}\,.\,(0,0,1)\;ds$$

$$\nabla\times\overline{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y & 6x & h(x,y) \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial h}{\partial y},-\frac{\partial h}{\partial x},3\right)$$

$Usando\; el\; siguiente\; cambio\; de\; variables: \begin{cases} x=r\,a\cos(\theta) \\ y=r\,b\,sen(\theta) \end{cases}$ $el\; Jacobiano\; es$

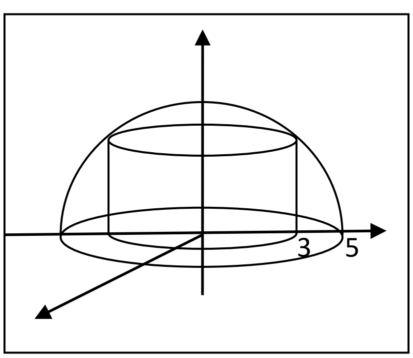
$J=rab$ $, de\; donde\; la\; circulación\; es:$

$$\Rightarrow \int_L \overline{F}\,.\,\overline{dl}=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{\partial h}{\partial y},-\frac{\partial h}{\partial x},3\right).\,(0,0,1)\;\underbrace{rab}_{jacobiano}\;dr\;d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 3r\,a\,b\,dr\,d\theta$$

$$\to\; 3ab\int_0^{2\pi}\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^1 d\theta=3ab\frac{1}{2}2\pi=\underline{3\pi\,a\,b}$$

5) Sean $W=\left\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2\le 25,\; x^2+y^2\ge 9,\; z\ge 0\right\}$ **y** $\overline{F}(x,y,z)=\left(sen(z)-x,\,y+z,\,z+e^x\right)$**. Hacer un gráfico aproximado de W y calcular el flujo saliente de** $\overline{F}$ **a través de** ***W*****.**

<u>Solución:</u> Para calcular el flujo se puede usar Teorema de Gauss pues se trata de un cuerpo cerrado, $\overline{F}$ es C^1, trabajamos en coordenadas cilíndricas donde $0\le z\le\sqrt{25-r^2}$:



Se calcula la Divergencia de $\overline{F}$:

$$\nabla\,.\,\overline{F}=-1+1+1=1$$

$$\iint_S \overline{F}\,.\,n\;ds=\iiint_W \nabla\,.\,\overline{F}\,dV=\iiint_W dV=Volumen\;de\;W=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_3^5\int_0^{\sqrt{25-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_3^5 r\sqrt{25-r^2}\;dr\,d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left.\frac{2}{3}\left(25-r^2\right)^{3/2}\right|_3^5 d\theta$$

$$=\frac{1}{3}.64\,.\,2\pi=\frac{128}{3}\pi$$